密封线内不要答题

科类____________ 考号____________ 姓名____________

绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学（二）

全真模拟(一)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.满分150分.考试时间150分钟.

题　号	一	二	三	总　分	统分人签字
分　数					

第Ⅰ卷（选择题，共40分）

得　分	评卷人

一、选择题(1～10小题，每小题4分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. 下列极限等于1的是 【　】

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$　　B. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{x}$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{3x+5}$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

2. 函数 $y=|x|+1$ 在 $x=0$ 处 【　】

A. 无定义　　B. 不连续

C. 连续但是不可导　　D. 可导

3. 函数 $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ 在区间$(-1,1)$内 【　】

A. 单调减少　　B. 单调增加

C. 不增不减　　D. 有增有减

4. 函数 $f(x)=x^4-24x^2+6x$ 在定义域内的凸区间是 【　】

A. $(-\infty,0)$　　B. $(-2,2)$

C. $(0,+\infty)$　　D. $(-\infty,+\infty)$

5. 若$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{x^4}{2}$，则$\int_0^4\dfrac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x})\mathrm{d}x$等于 【　】

A. 2　　B. 4　　C. 8　　D. 16

6. 积分$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$ 等于 【　】

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

7. 若$\int_{-\infty}^{0}e^{kx}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$，则 k 等于 【　】

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $-\dfrac{1}{3}$　　C. 3　　D. -3

8. 设 $z=xe^{xy}$，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 等于 【　】

A. xye^{xy}　　B. x^2e^{xy}

C. e^{xy}　　D. $(1+xy)e^{xy}$

9. 设函数 $z=\ln xy+e^{x^2y}$，则$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=$ 【　】

A. $\dfrac{1}{2}-2e^2$　　B. $\dfrac{1}{2}+e^2$　　C. $1+2e^2$　　D. $1+e^2$

10. 把两封信随机地投入标号为1,2,3,4的4个邮筒中，则1,2号邮筒各有一封信的概率等于 【　】

A. $\dfrac{1}{16}$　　B. $\dfrac{1}{12}$　　C. $\dfrac{1}{8}$　　D. $\dfrac{1}{4}$

第Ⅱ卷（非选择题，共110分）

得　分	评卷人

二、填空题(11～20小题，每小题4分，共40分)

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{3x}=$________.

12. $y=\arctan e^x$，则 $\left.y'\right|_{x=0}=$________.

13. 设 $y=y(x)$ 由 $x^2+2xy-y^2=2x$ 确定，且 $\left.y\right|_{x=2}=0$，则 $\left.y'\right|_{x=2}=$________.

14. 曲线 $x^2+y^2=2x$ 在点$(1,1)$处的切线方程为________.

15. 曲线 $y=x^3-3x^2+2x+1$ 的拐点是________.

16. $\int(\sqrt{x}-1)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=$________.

17. $\int\sin 2x\cos x\mathrm{d}x=$________.

18. $\int_{-1}^{1}\dfrac{x}{\sqrt{10-6x}}\mathrm{d}x=$________.

19. $\int_1^e\ln x\mathrm{d}x=$________.

20. 若 $z=\ln(x+e^y)$，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

得　分	评卷人

三、解答题(21～28题,共70分.解答应写出推理、演算步骤)

21.(本题满分8分)

计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

22.(本题满分8分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

23.(本题满分8分)

求$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$.

24.(本题满分8分)

设f''存在,$z=\dfrac{1}{x}f(xy)+yf(x+y)$,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

25.(本题满分8分)

一个袋子中有5个球,编号为1,2,3,4,5,同时从中任取3个,以X表示取出的3个球中的最大号码,求随机变量X的概率分布.

26.(本题满分10分)

求$y=f(x)=2x^3-3x^2-12x+14$的极值点和极值,以及函数曲线的凸凹性区间和拐点.

27.(本题满分10分)

设$z=\sin(xy^2)+e^{x^2y}$,求dz.

28.(本题满分10分)

当$x>0$时,证明:$e^x>1+x$.

密封线内不要答题

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=0$ （$\arctan x$ 是有界函数），$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$（用无穷小代换：$\arctan x\sim x(x\to 0)$），$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{3x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\frac{1}{x}}{3+\frac{5}{x}}=\dfrac{2}{3}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0\left(x\to\infty\text{ 时 }\dfrac{1}{x}\text{ 为无穷小量，而 }\sin x\text{ 是有界函数，注意}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\right)$.

2.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数在一点可导、连续的性质的知识点.

【应试指导】 从四个选项的内容来看，我们可以一步一步地处理，$x=0$ 时，$y=1$，$\lim\limits_{x\to 0}(|x|+1)=1$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. y 在 $x=0$ 的可导性可从左右导数出发进行讨论. $f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$，$f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1$，由于 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，故应选 C.

3.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了函数的单调性的知识点.

【应试指导】 因为 $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$，所以 $y'=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$，令 $y'=0$，得 $x=0$；当 $x>0$ 时，$y'>0$；当 $x<0$ 时，$y'<0$，故在 $(-1,1)$ 内，函数有增有减.

4.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数的凸区间的知识点.

【应试指导】 因为 $f(x)=x^4-24x^2+6x$，则 $f'(x)=4x^3-48x+6$，$f''(x)=12x^2-48=12(x^2-4)$，令 $f''(x)<0$，有 $x^2-4<0$，于是 $-2<x<2$，即凸区间为 $(-2,2)$.

5.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】 解法 1：

$$\int_0^4\frac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x})dx=\int_0^4 f(\sqrt{x})\cdot 2d(\sqrt{x})=2\times\frac{1}{2}x^2\Big|_0^4=16.$$

解法 2：

因 $\int_0^x f(t)dt=\dfrac{x^4}{2}$，于是 $f(x)=2x^3$，从而 $\int_0^4\dfrac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x})dx=\int_0^4\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot 2\cdot x^{\frac{3}{2}}dx=2\int_0^4 xdx=x^2\Big|_0^4=16.$

6.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 解法 1：

因 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ 为奇函数，故由积分性质知，$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+\cos x}dx=0.$

解法 2：

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos x}d(1+\cos x)=-\ln(1+\cos x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=0.$$

7.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了无穷区间的反常积分的知识点.

【应试指导】 因 $\int_{-\infty}^0 e^{kx}dx=\dfrac{1}{k}e^{kx}\Big|_{-\infty}^0=\begin{cases}\dfrac{1}{k}, & k>0,\\ \infty, & k\leqslant 0,\end{cases}$ 故 $k>0$，由题意知 $\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{3}$，从而 $k=3$.

8.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 因 $z=xe^{xy}$，所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{xy}+x\cdot e^{xy}\cdot y=(1+xy)e^{xy}$.

9.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了二元函数的一点处的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 由 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{xy}\cdot x+e^{x^2y}\cdot x^2$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)}=\dfrac{1}{2}+e^2$.

注 也可先将 $x=1$ 代入，则 $z\Big|_{(1,y)}=\ln y+e^y$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{y}+e^y$，所以 $\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)}=\dfrac{1}{2}+e^2$.

10.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了古典概率的知识点.

【应试指导】 因两封信投向四个邮筒共有的投法（可重复排列）为 $n=4^2=16$；满足 1，2 号邮筒各有一封信的投法为 $k=A_2^2=2$，故所求概率为 $P=\dfrac{k}{n}=\dfrac{2}{16}=\dfrac{1}{8}$.

二、填空题

11.【答案】 e^{-6}

【考情点拨】 本题考查了 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ 的应用的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-\frac{x}{2}}\right)^{-\frac{x}{2}\cdot(-6)}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{-\frac{x}{2}}\right)^{-\frac{x}{2}}\right]^{-6}=e^{-6}$.

12.【答案】 $\dfrac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了一元函数在一点处的一阶导数的知识点.

【应试指导】 由 $y'=\dfrac{1}{1+(e^x)^2}\cdot e^x$，令 $x=0$，则 $y'\Big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$.

13.【答案】 $-\dfrac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了隐函数在一点处的一阶导数的知识点.

【应试指导】 $x^2+2xy-y^2=2x$ 两边对 x 求导（注意 y 是 x 的函数），因 $2x+2y+2xy'-2yy'=2$，故 $y'=\dfrac{2-2x-2y}{2x-2y}=\dfrac{1-x-y}{x-y}$. 令 $x=2$，且 $y\Big|_{x=2}=0$，则 $y'\Big|_{x=2}=-\dfrac{1}{2}$.

14.【答案】 $y=1$

【考情点拨】 本题考查了曲线上一点处的切线方程的知识点.

【应试指导】 由 $x^2+y^2=2x$，两边对 x 求导得 $2x+2yy'=2$，取 $x=1$，$y=1$，则 $y'\Big|_{x=1}=0$，所以切线方程为 $y=1$.

15.【答案】 $(1,1)$

【考情点拨】 本题考查了曲线的拐点的知识点.

【应试指导】 $y'=3x^2-6x+2$，$y''=6x-6$，令 $y''=0$，得 $x=1$. 则当 $x>1$ 时，$y''>0$；当 $x<1$ 时，$y''<0$. 又因 $x=1$ 时 $y=1$，故点 $(1,1)$ 是拐点（因 $y=x^3-3x^2+2x+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处有二阶导数，故没有其他形式的拐点）.

16.【答案】 $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x+2x^{\frac{1}{2}}-\ln|x|+C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int(\sqrt{x}-1)\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int(x^{\frac{1}{2}}-1+x^{-\frac{1}{2}}-x^{-1})\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x+2x^{\frac{1}{2}}-\ln|x|+C.$

17.【答案】 $-\frac{2}{3}\cos^3x+C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int\sin2x\cos x\mathrm{d}x=\int2\sin x\cos^2x\mathrm{d}x=-\int2\cos^2x\mathrm{d}\cos x=-2\times\frac{1}{3}\cos^3x+C=-\frac{2}{3}\cos^3x+C.$

18.【答案】 $\frac{2}{27}$

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{10-6x}}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{-6x}{\sqrt{10-6x}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{6}\int_{-1}^{1}\frac{-6x+10-10}{\sqrt{10-6x}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{6}\int_{-1}^{1}\sqrt{10-6x}\mathrm{d}x+\frac{10}{6}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{10-6x}}=-\frac{1}{6}\int_{-1}^{1}\left[-\frac{1}{6}(10-6x)^{\frac{1}{2}}\right]\mathrm{d}(10-6x)+\frac{10}{6}\int_{-1}^{1}\left[-\frac{1}{6}(10-6x)^{-\frac{1}{2}}\right]\mathrm{d}(10-6x)=\frac{1}{36}\times\frac{2}{3}(10-6x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{1}-\frac{10}{36}\times2(10-6x)^{\frac{1}{2}}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{54}\times(8-64)-\frac{5}{9}\times(2-4)=\frac{2}{27}.$

注:本题可另解如下:令 $\sqrt{10-6x}=t$，则 $x=\frac{1}{6}(10-t^2)$.

所以 $\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{10-6x}}\mathrm{d}x=\int_{4}^{2}\frac{\frac{1}{6}(10-t^2)}{t}\cdot\frac{1}{6}\cdot(-2t)\mathrm{d}t=\frac{1}{18}\int_{2}^{4}(10-t^2)\mathrm{d}t=\frac{1}{18}\left(10t-\frac{1}{3}t^3\right)\Big|_{2}^{4}=\frac{1}{18}\times\left(40-\frac{64}{3}-20+\frac{8}{3}\right)=\frac{2}{27}.$

19.【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了定积分的分部积分法的知识点.

【应试指导】 $\int_{1}^{e}\ln x\mathrm{d}x=x\ln x\Big|_{1}^{e}-\int_{1}^{e}x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=e-(e-1)=1.$

20.【答案】 $-\frac{e^y}{(x+e^y)^2}$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的混合偏导数的知识点.

【应试指导】 因 $z=\ln(x+e^y)$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+e^y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{-e^y}{(x+e^y)^2}$.

三、解答题

21. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2}$

$=2.$

注:本题也可用洛必达法则求解.

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{-\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}=\lim\limits_{x\to0}2\sqrt{1-x^2}=2$，

本题还可用变量代换求解如下:令 $\sqrt{1-x^2}=t$，

原式 $=\lim\limits_{t\to1}\frac{1-t^2}{1-t}=\lim\limits_{t\to1}(1+t)=2.$

22. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{2}.$

23. $\int_0^{+\infty}xe^{-x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^a xe^{-x}\mathrm{d}x=-\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^a x\mathrm{d}e^{-x}$

$=\lim\limits_{a\to+\infty}(-ae^{-x})\Big|_0^a+\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-x}\mathrm{d}x$

$=\lim\limits_{a\to+\infty}(-ae^{-a})+\lim\limits_{a\to+\infty}(-e^{-x})\Big|_0^a$

$=\lim\limits_{a\to+\infty}(1-e^{-a})=1.$

24. 由 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}f(xy)+\frac{1}{x}f'(xy)\cdot y+yf'(x+y)$，

则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x^2}f'(xy)\cdot x+\frac{1}{x}[f'(xy)+yf''(xy)\cdot x]+f'(x+y)+yf''(x+y)$

$=yf''(xy)+f'(x+y)+yf''(x+y).$

25. 依题意,随机变量 X 只能取值 3,4,5;且 $P\{X=3\}=\frac{1}{C_5^3}=\frac{1}{10}$;

$P\{X=4\}=\frac{C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$;$P\{X=5\}=\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{6}{10}$.

所以 X 的概率分布为

X	3	4	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

26. $y'=6x^2-6x-12$，$y''=12x-6$，

令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=-1$，$x_2=2$，

当 $x_2=2$ 时，$y''=18>0$. 所以 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取极小值 -6.

当 $x_1=-1$ 时，$y''<0$. 所以 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取极大值 21.

又令 $y''=0$，得 $x=\frac{1}{2}$，$x<\frac{1}{2}$ 时，$y''<0$，从而曲线为凸的，即函数曲线的凸区间为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$；$x>\frac{1}{2}$ 时，$y''>0$，从而曲线为凹的，即函数曲线的凹区间为 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$；又因 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{2}$，故曲线的拐点为 $\left(\frac{1}{2},\frac{15}{2}\right)$.

27. 由 $\frac{\partial z}{\partial x}=\cos(xy^2)\cdot y^2+e^{x^2y}\cdot2xy$，

$\frac{\partial z}{\partial y}=\cos(xy^2)\cdot2xy+e^{x^2y}\cdot x^2$，

所以 $\mathrm{d}z=[y^2\cos(xy^2)+2xye^{x^2y}]\mathrm{d}x+[2xy\cos(xy^2)+x^2e^{x^2y}]\mathrm{d}y$.

28. **证法 1**:在 $[0,x]$ 上令 $F(x)=e^x$，则使用拉格朗日定理得，

$F(x)-F(0)=F'(\xi)(x-0)$，$\xi\in(0,x)$，即 $e^x-1=e^\xi\cdot x$，

由于 $e^\xi>1$，所以 $e^x-1>x$，即 $e^x>1+x$.

证法 2:令 $G(x)=e^x-1-x$，则 $G'(x)=e^x-1$，故在 $[0,x]$ 内 $G'(x)>0$，

所以在 $[0,x]$ 上 $G(x)$ 单调递增，由 $G(0)=0$，得 $x>0$ 时，$G(x)>0$，

即 $e^x-1-x>0$，亦即 $e^x>1+x$.

密封线内不要答题

科类________ 考号________ 姓名________

绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学（二）

全真模拟(二)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.满分150分.考试时间150分钟.

题　号	一	二	三	总　分	统分人签字
分　数					

第Ⅰ卷（选择题，共40分）

得　分	评卷人

一、选择题(1～10小题,每小题4分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 当 $x\to 0$ 时,下列变量是无穷小量的是 【　　】

A. $\frac{\sin x}{x}$　　B. $\ln|x|$

C. $\frac{x}{1+x}$　　D. $\cot x$

2. 曲线 $y=x^3-3x$ 上切线平行于 x 轴的点是 【　　】

A. $(0,0)$　　B. $(1,2)$

C. $(-1,2)$　　D. $(-1,-2)$

3. 若 $f(u)$ 可导,且 $y=f(e^x)$,则 $dy=$ 【　　】

A. $f'(e^x)dx$　　B. $f'(e^x)e^x dx$

C. $f(e^x)e^x dx$　　D. $f'(e^x)$

4. 已知函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导,且 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{f(x_0-2h)-f(x_0)}=\frac{1}{4}$,则 $f'(x_0)$ 等于 【　　】

A. -4　　B. -2　　C. 2　　D. 4

5. 如果在区间 (a,b) 内,函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)>0$,$f''(x)<0$,则函数在此区间是 【　　】

A. 单调递增且曲线为凹的　　B. 单调递减且曲线为凸的

C. 单调递增且曲线为凸的　　D. 单调递减且曲线为凹的

6. 曲线 $y=(x-1)^3-1$ 的拐点是 【　　】

A. $(2,0)$　　B. $(1,-1)$

C. $(0,-2)$　　D. 不存在

7. 若 $\int f(x)dx=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$,则 $f(x)$ 等于 【　　】

A. $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　B. $\frac{1}{1+x^2}$

C. $-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$　　D. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

8. 下列反常积分收敛的是 【　　】

A. $\int_1^{+\infty}\cos x dx$　　B. $\int_1^{+\infty}e^x dx$　　C. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx$　　D. $\int_1^{+\infty}\ln x dx$

9. 设 $z=x^y$,则 $dz=$ 【　　】

A. $yx^{y-1}dx+x^y\ln x dy$　　B. $x^{y-1}dx+ydy$

C. $x^y(dx+dy)$　　D. $x^y(xdx+ydy)$

10. 某建筑物按设计要求使用寿命超过50年的概率为0.8,超过60年的概率为0.6,该建筑物经历了50年后,它将在10年内倒塌的概率等于 【　　】

A. 0.25　　B. 0.30　　C. 0.35　　D. 0.40

第Ⅱ卷（非选择题，共110分）

得　分	评卷人

二、填空题(11～20小题,每小题4分,共40分)

11. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-2\sqrt{3}x+3}{x^2-3}=$ ________.

12. 当 $f(0)=$ ________时,$f(x)=\ln(1+kx)^{\frac{m}{x}}$ 在 $x=0$ 处连续.

13. 若 $f'(x_0)=1$,$f(x_0)=0$,则 $\lim\limits_{h\to\infty}hf\left(x_0-\frac{1}{h}\right)=$ ________.

14. 设 $y=x^2\cos x+2^x+e$,则 $y'=$ ________.

15. $\int_{-1}^{1}\frac{x^2\sin x}{1+x^2}dx=$ ________.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\cos^2 t dt}{x}=$ ________.

17. 设 $f(x)=e^{-x}$,则 $\int\frac{f'(\ln x)}{x}dx=$ ________.

18. 设 $z=\cos(xy^2)$,则 $\frac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

19. 设 $z=\frac{(x-2y)^2}{2x+y}$,则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ ________.

20. 设 $z=e^{xe^y}$,则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ________.

得　分	评卷人

三、解答题(21 ～ 28 题,共 70 分.解答应写出推理、演算步骤)

21.(本题满分 8 分)

计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{\sin^{2}x}$.

22.(本题满分 8 分)

试确定 a,b 的值,使函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin ax+1, & x<0,\\ 2, & x=0,\\ x\sin\dfrac{1}{x}+b, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续.

23.(本题满分 8 分)

设 $y=\ln\cos x$,求 $y''(0)$.

24.(本题满分 8 分)

求$\displaystyle\int\frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

25.(本题满分 8 分)

从一批有 10 件正品及 2 件次品的产品中,不放回地一件一件地抽取产品.设每个产品被抽到的可能性相同.求直到取出正品为止所需抽取的次数 X 的概率分布.

26.(本题满分 10 分)

确定函数 $y=2x^{4}-12x^{2}$ 的单调区间、极值及函数曲线的凸凹性区间和拐点.

27.(本题满分 10 分)

求曲线 $y=x^{2}$ 与该曲线在 $x=a(a>0)$ 处的切线与 x 轴所围的平面图形的面积.

28.(本题满分 10 分)

求由方程 $2x^{2}+y^{2}+z^{2}+2xy-2x-2y-4z+4=0$ 确定的隐函数的全微分.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了无穷小量的知识点.

【应试指导】 经实际计算及无穷小量定义知应选 C. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\ln|x|=-\infty$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{1+x}=0$, $\lim\limits_{x\to0}\cot x=\infty$.

注先观察四个选项，从已知极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，先把 A 排除，再利用 $\ln x$ 的性质可把 B 排除，C 自然可验证是正确的，由 $\cot x$ 的性质，可排除 D 项.

2.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了曲线上一点处的切线的知识点.

【应试指导】 由 $y=x^3-3x$ 得 $y'=3x^2-3$，令 $y'=0$，得 $x=\pm1$. 经计算 $x=-1$ 时，$y=2$；$x=1$ 时，$y=-2$，故选 C.

3.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了复合函数的微分的知识点.

【应试指导】 因为 $y=f(e^x)$，所以，$y'=\ f'(e^x)e^x\mathrm{d}x$.

4.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了利用定义求函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 因$\lim\limits_{h\to0}\frac{h}{f(x_0-2h)-f(x_0)}=\frac{1}{\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}}=\frac{1}{-2f'(x_0)}=\frac{1}{4}$，于是 $f'(x_0)=-2$.

5.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数的单调性和凹凸性的知识点.

【应试指导】 因 $f'(x)>0$，故函数单调递增，又 $f''(x)<0$，所以函数曲线为凸的.

6.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了曲线的拐点的知识点.

【应试指导】 因 $y=(x-1)^3-1$，$y'=3(x-1)^2$，$y''=6(x-1)$，令 $y''=0$ 得 $x=1$，当 $x<1$ 时，$y''<0$；当 $x>1$ 时，$y''>0$. 又因 $y\Big|_{x=1}=-1$，于是曲线有拐点 $(1,-1)$.

7.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 因$\int f(x)\mathrm{d}x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$，所以 $f(x)=[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C]'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

8.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了无穷区间的反常积分的敛散性的知识点.

【应试指导】 对于选项 A：$\int_1^{+\infty}\cos x\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\cos x\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}(\sin b-\sin 1)$ 不存在，此积分发散；对于选项 B：$\int_1^{+\infty}e^x\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b e^x\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}(e^b-e)$ 不存在，此积分发散；对于选项 C：$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2x^2}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{2}$，此积分收敛；对于选项 D：$\int_1^{+\infty}\ln x\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\ln x\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\left[(x\ln x)-x\Big|_1^b\right]=\lim\limits_{b\to+\infty}(b\ln b-b+1)$ 不存在，此积分发散.

9.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】 由$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\cdot\ln x$，所以 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=yx^{y-1}\mathrm{d}x+x^y\ln x\mathrm{d}y$，故选 A.

10.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了条件概率的知识点.

【应试指导】 设 $A=\{$该建筑物使用寿命超过 50 年$\}$，$B=\{$该建筑物使用寿命超过 60 年$\}$，由题意，$P(A)=0.8$，$P(B)=0.6$，所求概率为：$P(\overline{B}\mid A)=1-P(B\mid A)=1-\frac{P(AB)}{P(A)}=1-\frac{P(B)}{P(A)}=1-\frac{0.6}{0.8}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}=0.25$.

二、填空题

11.【答案】 0

【考情点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to\sqrt3}\frac{x^2-2\sqrt3x+3}{x^2-3}=\lim\limits_{x\to\sqrt3}\frac{(x-\sqrt3)^2}{(x-\sqrt3)(x+\sqrt3)}=\lim\limits_{x\to\sqrt3}\frac{x-\sqrt3}{x+\sqrt3}=0$.

12.【答案】 mk

【考情点拨】 本题考查了函数在一点处连续的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\ln(1+kx)^{\frac{m}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\ln(1+kx)^{\frac{1}{kx}\cdot km}=\ln e^{km}=km$，所以当 $f(0)=km$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

13.【答案】 -1

【考情点拨】 本题考查了利用导数定义求极限的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{h\to\infty}hf\left(x_0-\frac{1}{h}\right)=-\lim\limits_{h\to\infty}\frac{f\left(x_0-\frac{1}{h}\right)-f(x_0)}{-\frac{1}{h}}=-\lim\limits_{t\to0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}=-f'(x_0)=-1$.

注：注意导数定义的结构特点.

$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

14.【答案】 $2x\cos x-x^2\sin x+2^x\ln2$

【考情点拨】 本题考查了一元函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 $(x^2\cos x)'=2x\cos x-x^2\sin x$，$(2^x)'=2^x\cdot\ln2$，$e'=0$，所以 $y'=2x\cos x-x^2\sin x+2^x\ln2$.

15.【答案】 0

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 因函数 $f(x)=\frac{x^2\sin x}{1+x^2}$ 在$[-1,1]$上是奇函数，因此$\int_{-1}^1\frac{x^2\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x=0$.

注：奇偶函数在对称区间上积分的性质是常考题目之一，应注意.

16.【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了洛必达法则的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x\cos^2t\mathrm{d}t}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos^2x}{1}=1$.

17.【答案】 $\frac{1}{x}+C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \frac{f'(\ln x)}{x}dx = \int f'(\ln x)d\ln x \xlongequal{u=\ln x} \int f'(u)du = f(u)+C = e^{-u}+C = e^{-\ln x}+C = \frac{1}{x}+C.$

本题也可另解如下：

由 $f(x)=e^{-x}$ 得 $f'(x)=-e^{-x}$，所以 $f'(\ln x)=-e^{-\ln x}=-\frac{1}{x}$，故 $\int \frac{f'(\ln x)}{x}dx = \int -\frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{x}+C.$

18.【答案】 $-2xy\sin(xy^2)$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 因 $z=\cos(xy^2)$，故 $\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin(xy^2)\cdot(xy^2)' = -2xy\sin(xy^2)$.

19.【答案】 $\frac{2(x-2y)(x+3y)}{(2x+y)^2}$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $z=\frac{(x-2y)^2}{2x+y}$，则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2(x-2y)\cdot(2x+y)-2(x-2y)^2}{(2x+y)^2} = \frac{2(x-2y)(2x+y-x+2y)}{(2x+y)^2}$

$= \frac{2(x-2y)(x+3y)}{(2x+y)^2}$.

20.【答案】 $(1+xe^y)e^{y+xe^y}$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的混合偏导数的知识点.

【应试指导】 因 $z=e^{xe^y}$，于是 $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xe^y}\cdot e^y$；$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = e^{xe^y}\cdot xe^y\cdot e^y + e^{xe^y}\cdot e^y = (1+xe^y)e^{y+xe^y}$.

三、解答题

21. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

$=1$.

注：将分母 $\sin^2 x$ 用与之等价的无穷小量 x^2 代换，这是一个技巧.

22. $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}\sin ax+1\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(a\cdot\frac{\sin ax}{ax}+1\right)=a+1$,

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}+b\right)=b$,

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}f(x) = f(0)$，

即 $a+1=b=2$，即 $a=1, b=2$.

23. $y'=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\tan x$，$y''=-\sec^2 x$，所以 $y''(0)=-1$.

24. $\int\frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}dx = \int\frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}dx$

$=\int(\sin x+\cos x)dx$

$=-\cos x+\sin x+C$.

25. 由题意，X 的所有可能的取值为 1，2，3，

$X=1$，即第一次就取到正品，$P\{X=1\}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$；

$X=2$，即第一次取到次品且第二次取到正品，$P\{X=2\}=\frac{2}{12}\times\frac{10}{11}=\frac{5}{33}$；

同理，$P\{X=3\}=\frac{2}{12}\times\frac{1}{11}\times\frac{10}{10}=\frac{1}{66}$，

故 X 的概率分布如下

X	1	2	3
P	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{33}$	$\frac{1}{66}$

26. $y'=8x^3-24x$，$y''=24x^2-24$，令 $y'=0$，得 $x=\pm\sqrt{3}$ 或 $x=0$.

令 $y''=0$，得 $x=\pm 1$；$x<-\sqrt{3}$ 时，$y'<0$；$-\sqrt{3}<x<0$ 时，$y'>0$；

$0<x<\sqrt{3}$ 时，$y'<0$；$x>\sqrt{3}$ 时，$y'>0$.

于是，函数的递增区间为 $(-\sqrt{3},0)$ 和 $(\sqrt{3},+\infty)$；递减区间为 $(-\infty,-\sqrt{3})$ 和 $(0,\sqrt{3})$；有极小值 $f(\pm\sqrt{3})=-18$，有极大值 $f(0)=0$.

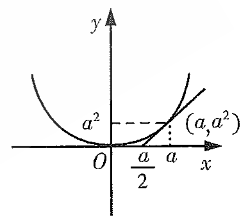
又因当 $-\infty<x<-1$ 时，$y''>0$，则 y 为凹函数；

当 $-1<x<1$ 时，$y''<0$，则 y 为凸函数；

当 $1<x<+\infty$ 时，$y''>0$，则 y 为凹函数.

综上得函数 y 的凹区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$，凸区间为 $(-1,1)$，且拐点为 $(-1,-10)$ 和 $(1,-10)$.

27. 如图所示，在 $x=a$ 处切线的斜率为 $y'\Big|_{x=a}=2a$，切线方程为 $y-a^2=2a(x-a)$，



即 $y=2ax-a^2$，

$S=\int_0^{a^2}\left(\frac{y+a^2}{2a}-\sqrt{y}\right)dy$

$=\frac{1}{2a}\left(\frac{y^2}{2}+a^2y\right)\Big|_0^{a^2}-\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{a^2}=\frac{1}{12}a^3$.

28. 等式两边对 x 求导，将 y 看做常数，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{4x+2y-2}{4-2z}=\frac{2x+y-1}{2-z}$，

同理 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y+2x-2}{4-2z}=\frac{x+y-1}{2-z}$，

所以 $dz=\frac{1}{2-z}[(2x+y-1)dx+(y+x-1)dy]$.

密封线内不要答题

密 封 线 内 不 要 答 题

科类________ 考号________ 姓名________

绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学（二）

全真模拟(三)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.满分150分.考试时间150分钟.

题　号	一	二	三	总　分	统分人签字
分　数					

第Ⅰ卷(选择题,共40分)

得　分	评卷人

一、选择题(1～10小题,每小题4分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 当 $x\to0$ 时,无穷小量 $x+\sin x$ 是比 x 的　　【　　】

A. 高阶无穷小　　B. 低阶无穷小

C. 同阶但非等价无穷小　　D. 等价无穷小

2. 下列极限计算正确的是　　【　　】

A. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=0$　　B. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=1$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sin x}=1$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$

3. 设 $f'(1)=1$,则 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^2-1}$ 等于　　【　　】

A. 0　　B. 1　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 2

4. 设 $f'(\cos^2x)=\sin^2x$,且 $f(0)=0$,则 $f(x)$ 等于　　【　　】

A. $x+\dfrac{1}{2}x^2$　　B. $x-\dfrac{1}{2}x^2$　　C. $\sin^2x$　　D. $\cos x-\dfrac{1}{2}\cos^2x$

5. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则 $\int\cos xf(\sin x)\mathrm{d}x=$　　【　　】

A. $F(\cos x)+C$　　B. $F(\sin x)+C$　　C. $-F(\cos x)+C$　　D. $-F(\sin x)+C$

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $a\neq-b$,则下列各式不成立的是　　【　　】

A. $\int_a^bf(x)\mathrm{d}x=\int_a^bf(t)\mathrm{d}t$　　B. $\int_a^bf(x)\mathrm{d}x=-\int_b^af(x)\mathrm{d}x$

C. $\int_a^bf(x)\mathrm{d}x=0$　　D. 若 $\int_a^bf(x)\mathrm{d}x=0$,必有 $f(x)=0$

7. 下列反常积分发散的是　　【　　】

A. $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$　　B. $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x\cdot\ln^2x}\mathrm{d}x$　　C. $\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$　　D. $\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

8. 设 $z=\ln\dfrac{y}{x}$,则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 等于　　【　　】

A. $\dfrac{x}{y}$　　B. $\dfrac{1}{x}$　　C. $-\dfrac{1}{x}$　　D. $-\dfrac{y}{x^2}$

9. 设 $z=x^3\mathrm{e}^{y^2}$,则 $\mathrm{d}z$ 等于　　【　　】

A. $6x^2y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　B. $x^2\mathrm{e}^{y^2}(3\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y)$

C. $3x^2\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x$　　D. $x^3\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y$

10. 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次,其命中率分别为0.6和0.5,现已知目标被命中,是甲射中的概率为　　【　　】

A. 0.6　　B. 0.75　　C. 0.85　　D. 0.9

第Ⅱ卷(非选择题,共110分)

得　分	评卷人

二、填空题(11～20小题,每小题4分,共40分)

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{2}{x}}{\sin\dfrac{4}{x}}=$ ________.

12. 函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x>0,\\ \dfrac{a+x^2}{6}, & x\leqslant0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ ________.

13. $y=\cos\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$,则 $\mathrm{d}y=$ ________.

14. $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{3}{x}}=$ ________.

15. 设 $z=\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$,则 $\dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=$ ________.

16. 设 $y=\mathrm{e}^{2\arccos x}$,则 $y'\Big|_{x=0}=$ ________.

17. $\int_0^2|x-1|\mathrm{d}x=$ ________.

18. $\int\dfrac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=$ ________.

19. $\int\sec^25x\mathrm{d}x=$ ________.

20. 设 $f(x)$ 是 $[-2,2]$ 上的偶函数,且 $f'(-1)=3$,则 $f'(1)=$ ________.

得　分	评卷人

三、解答题(21 ～ 28 题,共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21.(本题满分 8 分)

设$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=5$,求 a,b.

22.(本题满分 8 分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x-1}{\ln(1+x)}$.

23.(本题满分 8 分)

设 $y=\sin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$,求 y'.

24.(本题满分 8 分)

计算$\displaystyle\int\frac{x+\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

25.(本题满分 8 分)

已知$\displaystyle\int_1^{x+1}f(t)\mathrm{d}t=xe^{x+1}$,求 $f'(x)$.

26.(本题满分 10 分)

求函数 $y=2x^3-3x^2$ 的单调区间、极值及函数曲线的凸凹性区间、拐点和渐近线.

27.(本题满分 10 分)

一批零件中有 10 个合格品,3 个次品,安装机器时,从这批零件中任取一个,取到合格品才能安装. 若取出的是次品,则不再放回,求在取得合格品前已取出的次品数 X 的概率分布.

28.(本题满分 10 分)

计算$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\displaystyle\int_1^x\left(\int_t^1 e^{-u^2}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t}{(x-1)^2}$.

密 封 线 内 不 要 答 题

密封线内不要答题

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了无穷小量的知识点.

【应试指导】 由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=2$,所以$x\to 0$时,$x+\sin x$与$x$是同阶但非等价无穷小.

2.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 对于选项A:$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1\neq 0$,错误;对于选项B:$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$,正确;对于选项C:$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sin x}=\infty\neq 1$,错误;对于选项D:$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0\neq 1$,错误.

3.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了利用导数定义求极限的知识点.

【应试指导】 因$f'(1)=1$,于是$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}$.

4.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了已知导函数求原函数的知识点.

【应试指导】 因$f'(\cos^2 x)=\sin^2 x=1-\cos^2 x$,于是$f'(x)=1-x$,两边积分得$f(x)=x-\frac{1}{2}x^2+C$,又$f(0)=0$,故$f(x)=x-\frac{1}{2}x^2$.

5.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了不定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】 $\int\cos x f(\sin x)\mathrm{d}x=\int f(\sin x)\mathrm{d}\sin x\xlongequal{u=\sin x}\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C=F(\sin x)+C$.

6.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了定积分的相关知识的知识点.

【应试指导】 由题意知,C项不成立,其余各项均成立.

7.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了无穷区间反常积分的发散性的知识点.

【应试指导】 对于选项A:$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{2}$,此积分收敛;对于选项B:$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{\ln 2}$,此积分收敛;对于选项C:$\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\Big|_{-\infty}^{0}=1$,此积分收敛;对于选项D:$\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\Big|_{-\infty}^{0}=-1+\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}$,该极限不存在,故此积分发散.

8.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 因$z=\ln\frac{y}{x}$,于是$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{1}{x}$.

9.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】 因$z=x^2\mathrm{e}^{y^2}$,于是$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\mathrm{e}^{y^2}$,$\frac{\partial z}{\partial y}=2x^2y\mathrm{e}^{y^2}$,故$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=2x\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x+2x^2y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y=x\mathrm{e}^{y^2}(2\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y)$.

10.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了条件概率的知识点.

【应试指导】 设$A_1=\{$甲射中目标$\}$,$A_2=\{$乙射中目标$\}$,$B=\{$目标被命中$\}$.由题意,$P(A_1)=0.6$,$P(A_2)=0.5$,$B=A_1\cup A_2$,$P(B)=1-P(\overline{A_1\cup A_2})=1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})=1-(1-0.6)(1-0.5)=0.8$;故所求概率为$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)}{P(B)}=\frac{0.6}{0.8}=0.75$.

二、填空题

11.【答案】 $\frac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}}{\sin\frac{4}{x}}\xlongequal{u=\frac{1}{x}}\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin 2u}{\sin 4u}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

12.【答案】 6

【考情点拨】 本题考查了函数在一点外连续的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^x=1$,$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{a+x^2}{6}=\frac{a}{6}$,又因$f(x)$在$x=0$连续,则应有$1=\frac{a}{6}$,故$a=6$.

13.【答案】 $\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\sin\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$.

【考情点拨】 本题考查了一元函数的微分的知识点.

【应试指导】 由$y=\cos\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$,所以$\mathrm{d}y=-\sin\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\cdot\sin\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$.

14.【答案】 e^6

【考情点拨】 本题考查了$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\mathrm{e}$的应用的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 6}=\mathrm{e}^6$.

15.【答案】 $-\frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\left(1+\frac{x}{y}\right)$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的混合偏导数的知识点.

【应试指导】 由$z=\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$,则$\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}$,故$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}+\frac{1}{y}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\left(\frac{1}{y^2}+\frac{x}{y^3}\right)=-\frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\left(1+\frac{x}{y}\right)$.

16.【答案】 $-2\mathrm{e}^{\pi}$

【考情点拨】 本题考查了一元函数在一点处的一阶导数的知识点.

【应试指导】 由$y'=\mathrm{e}^{2\arccos x}\cdot 2\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$,故$y'\Big|_{x=0}=-2\mathrm{e}^{\pi}$.

17.【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^2|x-1|\,dx=\int_0^1(1-x)dx+\int_1^2(x-1)dx=1-\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+\frac{1}{2}x^2\Big|_1^2-1=1.$

注绝对值函数的积分必须分段进行.

18.【答案】 $x-\arctan x+C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=x-\arctan x+C.$

19.【答案】 $\frac{1}{5}\tan 5x+C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】 $\int\sec^2 5x\,dx=\frac{1}{5}\int\sec^2 5x\,d5x\xlongequal{u=5x}\frac{1}{5}\int sec^2 u\,du=\frac{1}{5}tan\,u+C=\frac{1}{5}tan\,5x+C.$

20.【答案】 -3

【考情点拨】 本题考查了函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 因 $f(x)$ 是偶函数,故 $f'(x)$ 是奇函数,所以 $f'(-1)=-f'(1)$,即 $f'(1)=-f'(-1)=-3$.

三、解答题

21. 由 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=5$,且当 $x\to1$ 时,$x-1\to0$,故必须有

$\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$,即 $a+b+1=0$.

将 $b=-a-1$ 代入,有

$5=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax-a-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}=a+2,$

所以 $a=3,b=-4$.

22. 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+sin\,x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+cos\,x}{1}=2.$

23. $y'=cos\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}$

$=cos\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{-2}{(1+x)^2}$

$=\frac{-1}{(1+x)^2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\cdot cos\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$

24. 由 $\frac{arctan\,x}{1+x^2}dx=arctan\,x\,d\,arctan\,x$,则

$\int\frac{x+arctan\,x}{1+x^2}dx=\int\frac{x}{1+x^2}dx+\int\frac{arctan\,x}{1+x^2}dx$

$=\frac{1}{2}ln(1+x^2)+\int arctan\,x\,d\,arctan\,x$

$=\frac{1}{2}ln(1+x^2)+\frac{1}{2}(arctan\,x)^2+C.$

25. 等式两边对 x 求导,有

$f(x+1)=e^{x+1}+xe^{x+1}=(1+x)e^{x+1}$,

所以 $f(x)=xe^x$,因此 $f'(x)=e^x+xe^x$.

26. 令 $y'=6x^2-6x=0$,得 $x=0$ 或 $x=1$,

$y''=12x-6=0$,得 $x=\frac{1}{2}$.

	$(-\infty,0)$	0	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	−		−	0	+
y''	−		−	0	+		+
y	↗		↘		↘		↗

所以函数 y 的单调增区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(1,+\infty)$,单调减区间为 $(0,1)$;

函数 y 的凸区间为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$,凹区间为 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

故 $x=0$ 时,函数有极大值 0,$x=1$ 时,函数有极小值 -1,且点 $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ 为拐点,因 $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-3x^2)$ 不存在,

且 $y=2x^3-3x^2$ 没有无意义的点,故函数没有渐近线.

27. 由题意,X 的可能取值为 0,1,2,3. $X=0$,即第一次就取到合格品,没有取到次品,$P\{X=0\}=\frac{10}{13}$;$X=1$,即第一次取到次品,第二次取到合格品,$P\{X=1\}=\frac{3}{13}\times\frac{10}{12}=\frac{5}{26}$;同理,$P\{X=2\}=\frac{3}{13}\times\frac{2}{12}\times\frac{10}{11}=\frac{5}{143}$;

$P\{X=3\}=\frac{3}{13}\times\frac{2}{12}\times\frac{1}{11}\times\frac{10}{10}=\frac{1}{286}$.

所以 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	$\frac{10}{13}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{5}{143}$	$\frac{1}{286}$

28. 由洛必达法则

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\int_1^x\left(\int_t^1 e^{-u^2}du\right)dt}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\int_x^1 e^{-u^2}du}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{-e^{-x^2}}{2}=-\frac{1}{2e}.$

注:要使用洛必达法则必须检验定理的条件是否满足,由于 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)^2=0$,$\lim\limits_{x\to1}\int_1^x\left(\int_t^1 e^{-u^2}du\right)dt=0$,因此可使用洛必达法则.

密 封 线 内 不 要 答 题

科类＿＿＿＿ 考号＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿

绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学（二）

全真模拟(四)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.满分150分.考试时间150分钟.

题　号	一	二	三	总　分	统分人签字
分　数					

第Ⅰ卷(选择题,共40分)

得　分	评卷人

一、选择题(1～10小题,每小题4分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 下列变量在给定的变化过程中是无穷小量的是 【　　】

A. $\frac{\sin x}{x}(x\to 0)$　　B. $2^{-x}-2(x\to 0)$

C. $\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}(x\to +\infty)$　　D. $x\cdot \sin\frac{1}{x}(x\to 0)$

2. 函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & 0\leqslant x<1, \\ 2x, & 1\leqslant x\leqslant 3 \end{cases}$ 的连续区间是 【　　】

A. $[0,1)\cup(1,3]$　　B. $[1,3]$

C. $[0,1)$　　D. $[0,3]$

3. 函数 $y=ax^2+c$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加,则 a,c 应满足 【　　】

A. $a<0$ 且 $c=0$　　B. $a>0$ 且 c 是任意常数

C. $a<0$ 且 $c\neq 0$　　D. $a<0$ 且 c 是任意常数

4. 曲线 $y=x^4-3$ 在点 $(1,-2)$ 处的切线方程为 【　　】

A. $2x-y-6=0$　　B. $4x-y-6=0$

C. $4x-y-2=0$　　D. $2x-y-4=0$

5. 不定积分 $\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}+1\right)\mathrm{d}\sin x$ 等于 【　　】

A. $-\frac{1}{\sin x}+\sin x+C$　　B. $\frac{1}{\sin x}+\sin x+C$

C. $-\cot x+\sin x+C$　　D. $\cot x+\sin x+C$

6. 设 $z=(3x^2+y^2)^{xy}$,则 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 等于 【　　】

A. $xy\cdot(3x^2+y^2)^{xy-1}$

B. $(3x^2+y^2)^{xy}\cdot\ln(3x^2+y^2)$

C. $y\cdot(3x^2+y^2)^{xy}[(3x^2+y^2)\ln(3x^2+y^2)+6x^2]$

D. $y\cdot(3x^2+y^2)^{xy-1}[(3x^2+y^2)\ln(3x^2+y^2)+6x^2]$

7. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ 等于 【　　】

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

8. 对于函数 $z=xy$,原点 $(0,0)$ 【　　】

A. 不是函数的驻点　　B. 是驻点不是极值点

C. 是驻点也是极值点　　D. 无法判定是否为极值点

9. 曲线 $y=e^x$ 和直线 $y=1,x=1$ 围成的图形面积等于 【　　】

A. $2-e$　　B. $e-2$　　C. $e-1$　　D. $e+1$

10. 有两箱同种零件,第一箱内装50件,其中一等品10件;第二箱内装30件,其中一等品18件;现随机地从两箱中挑出一箱,再从这箱中随机地取出一件零件,则取出的零件是一等品的概率为 【　　】

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

第Ⅱ卷(非选择题,共110分)

得　分	评卷人

二、填空题(11～20小题,每小题4分,共40分)

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1}{3x^2+x+2}=$ ＿＿＿＿.

12. 设 $f(x)=x^3-2x^2+5x+1$,则 $f'(0)=$ ＿＿＿＿.

13. 设 $y=e^x\cos x$,则 $y''=$ ＿＿＿＿.

14. $\int\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\mathrm{d}x=$ ＿＿＿＿.

15. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}=$ ＿＿＿＿.

16. 若由 $e^y=xy$ 确定 y 是 x 的函数,则 $y'=$ ＿＿＿＿.

17. $\int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=$ ＿＿＿＿.

18. $\int_0^2\frac{1}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x=$ ＿＿＿＿.

19. 设 $z=u^2\ln v,u=\frac{y}{x},v=e^{x^3y}$,则 $\mathrm{d}z=$ ＿＿＿＿.

20. 设 $z=\sqrt{x(x+y^2)}$,则 $\frac{\partial z}{\partial y}=$ ＿＿＿＿.

得　分	评卷人

三、解答题(21 ～ 28 题，共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21.(本题满分 8 分)

设 $y = 2x^3 \arccos x + (x^2 - 2)\sqrt{1 - x^2}$，求 $\mathrm{d}y$.

22.(本题满分 8 分)

求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x \frac{\sin t^2}{t} \mathrm{d}t}{x^2}$.

23.(本题满分 8 分)

计算 $\int x^2 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.

24.(本题满分 8 分)

计算 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \dfrac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} \mathrm{d}x$.

25.(本题满分 8 分)

设 $f(u)$ 有二阶导数，计算 $\dfrac{\partial^2 f(\mathrm{e}^{xy})}{\partial x^2}$.

26.(本题满分 10 分)

已知曲线 $y = ax^3 + bx^2 + cx$ 在点(1,2)处有水平切线，且原点为该曲线的拐点，求 a,b,c 的值，并写出此曲线的方程.

27.(本题满分 10 分)

袋中有 4 个白球，2 个红球，从中任取 3 个球，用 X 表示所取 3 个球中红球的个数，求 X 的概率分布.

28.(本题满分 10 分)

设连续函数 $f(x) = \ln x - \int_1^{\mathrm{e}} f(x) \mathrm{d}x$，证明：$\int_1^{\mathrm{e}} f(x) \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

密封线内不要答题

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了无穷小量的知识点.

【应试指导】 由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to0}(2^{-x}-2)=-1$，故由无穷小量知应选 D. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}=1$，$\lim\limits_{x\to0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$.

2.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了函数的连续性的知识点.

【应试指导】 因 $x=1$ 处 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}2x=2$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续，因此 $f(x)$ 的连续区间为 $[0,1)\cup(1,3]$.

3.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数的单调增加性的知识点.

【应试指导】 由 $y'=2ax$，若 y 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加，则应有 $y'>0$，即 $a>0$，且对 c 没有其他要求，故选 B.

4.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了曲线上一点处的切线方程的知识点.

【应试指导】 因 $y=x^4-3$，所以 $y'=4x^3$，于是曲线在点 $(1,-2)$ 处的切线的斜率 $k=y'\Big|_{x=1}=4$，从而得切线方程：$y+2=4(x-1)$，即 $4x-y-6=0$.

5.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int\left(\frac{1}{\sin^2x}+1\right)\mathrm{d}\sin x=-\frac{1}{\sin x}+\sin x+C$，故选 A.

6.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 因 $z=(3x^2+y^2)^{xy}$ 可看作是 $z=u^v$，$u=3x^2+y^2$，$v=xy$ 复合而成，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=v\cdot u^{v-1}\cdot6x+u^v\cdot\ln u\cdot y=xy\cdot(3x^2+y^2)^{xy-1}\cdot6x+(3x^2+y^2)^{xy}\cdot\ln(3x^2+y^2)\cdot y=y\cdot(3x^2+y^2)^{xy-1}\cdot[(3x^2+y^2)\ln(3x^2+y^2)+6x^2]$.

7.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$.

8.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数的驻点、极值点的知识点.

【应试指导】 因 $z=xy$，于是 $\frac{\partial z}{\partial x}=y$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x$；令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0$，且 $\frac{\partial z}{\partial y}=0$，得驻点 $(0,0)$；又 $\frac{\partial^2z}{\partial x^2}=0$，$\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=1$，$\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=0$，从而 $B^2-AC=1>0$，故点 $(0,0)$ 不是极值点.

9.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了曲线围成的面积的知识点.

【应试指导】 由题意知，所求面积 $A=\int_0^1(e^x-1)\mathrm{d}x=e-2$.

10.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了全概率的知识点.

【应试指导】 设 $A_i=\{$挑出的是第 i 箱$\}$，$i=1,2$；$B=\{$取出的是一等品$\}$. 由题意知，$P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2}$，$P(B\mid A_1)=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}$，$P(B\mid A_2)=\frac{18}{30}=\frac{3}{5}$. 由全概率公式知：$P(B)=P(A_1)\cdot P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$.

二、填空题

11.【答案】 $\frac{1}{3}$

【考情点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1}{3x^2+x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{1}{3}$.

12.【答案】 5

【考情点拨】 本题考查了一元函数在一点处的一阶导数的知识点.

【应试指导】 由 $f(x)=x^3-2x^2+5x+1$，则 $f'(x)=3x^2-4x+5$，故 $f'(0)=5$.

13.【答案】 $-2e^x\sin x$

【考情点拨】 本题考查了一元函数的二阶导数的知识点.

【应试指导】 由 $y=e^x\cos x$，则 $y'=e^x\cos x-e^x\sin x$. $y''=e^x\cos x-e^x\sin x-e^x\sin x-e^x\cos x=-2e^x\sin x$.

14.【答案】 $-\sin\frac{1}{x}+C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】 $\int\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\int\cos\frac{1}{x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)\xlongequal{令\frac{1}{x}=u}-\sin u+C=-\sin\frac{1}{x}+C$.

15.【答案】 e^{-2}

【考情点拨】 本题考查了 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ 的应用的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{-\frac{1}{x}\cdot(-2)}=\lim\limits_{x\to0}[(1-x)^{-\frac{1}{x}}]^{-2}=e^{-2}$.

16.【答案】 $\frac{y}{e^y-x}$

【考情点拨】 本题考查了隐函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 在 $e^y=xy$ 两边对 x 求导(注意 y 是 x 的函数)，有 $e^y\cdot y'=y+xy'$，所以 $y'=\frac{y}{e^y-x}$.

17.【答案】 $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】 $\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\int-(\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}(1-x^2)=\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$.

18.【答案】 $-\frac{1}{2}\ln3$

【考情点拨】 本题考查了简单有理函数的积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^2 \frac{1}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{1}{(x-1)(x-3)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^2\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|\Bigg|_0^2$

$=-\frac{1}{2}\ln 3.$

19.【答案】 $y^3\mathrm{d}x+3xy^2\mathrm{d}y$

【考情点拨】 本题考查了复合函数的全微分的知识点.

【应试指导】 因 $z=u^2\ln v, u=\frac{y}{x}, v=\mathrm{e}^{x^3y}$，所以 $z=\frac{y^2}{x^2}\cdot x^3y=xy^3$，于是 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=y^3\mathrm{d}x+3xy^2\mathrm{d}y.$

20.【答案】 $\frac{xy}{\sqrt{x(x+y^2)}}$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{x(x+y^2)}}\cdot x\cdot 2y=\frac{xy}{\sqrt{x(x+y^2)}}.$

三、解答题

21. $\mathrm{d}y=\left[6x^2\arccos x+2x^3\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)+2x\sqrt{1-x^2}+(x^2-2)\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right]\mathrm{d}x$

$$=\left[6x^2\arccos x-\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^2}}+2x\sqrt{1-x^2}-\frac{x(x^2-2)}{\sqrt{1-x^2}}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\left(6x^2\arccos x-\frac{5x^3-4x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x.$$

22. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x^2}{x}}{2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}=\frac{1}{2}.$

23. $\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}\mathrm{e}^x$

$$=x^2\mathrm{e}^x-2\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

$$=x^2\mathrm{e}^x-2\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^x$$

$$=x^2\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x+C.$$

24. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x\cdot\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ （被积函数为偶函数）

$$=-2\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x\,\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}$$

$$=-2\left(\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}+2\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\arcsin x$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi+2\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi+1=1-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi.$$

25. $\frac{\partial f(\mathrm{e}^{xy})}{\partial x}=f'(\mathrm{e}^{xy})\cdot\mathrm{e}^{xy}\cdot y,$

$$\frac{\partial^2 f(\mathrm{e}^{xy})}{\partial x^2}=[f''(\mathrm{e}^{xy})\cdot\mathrm{e}^{xy}\cdot y]\cdot\mathrm{e}^{xy}y+yf'(\mathrm{e}^{xy})\cdot\mathrm{e}^{xy}\cdot y$$

$$=y^2\mathrm{e}^{xy}[f''(\mathrm{e}^{xy})\mathrm{e}^{xy}+f'(\mathrm{e}^{xy})].$$

26. $y=ax^3+bx^2+cx, y'=3ax^2+2bx+c, y''=6ax+2b,$

由已知条件得

$2=a+b+c$，　（曲线过(1,2)点）

$3a+2b+c=0$，　（在(1,2)点 $y'=0$）

$2b=0$，　（原点为拐点）

故 $b=0, a=-1, c=3$，此曲线的方程为 $y=-x^3+3x$.

27. 依题意，X 的可能取值为 0,1,2.

$P\{X=0\}=\frac{C_4^3}{C_6^3}=0.2$；$P\{X=1\}=\frac{C_2^1\cdot C_4^2}{C_6^3}=0.6$；

$P\{X=2\}=\frac{C_2^2\cdot C_4^1}{C_6^3}=0.2$，

所以 X 的概率分布为

X	0	1	2
P	0.2	0.6	0.2

28. 设 $\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x=c$，则 $f(x)=\ln x-c$，

故 $c=\int_1^{\mathrm{e}}(\ln x-c)\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x-c(\mathrm{e}-1)$

$$=(x\cdot\ln x)\Big|_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x-c(\mathrm{e}-1)$$

$$=\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)-c(\mathrm{e}-1)$$

$$=1-c(\mathrm{e}-1),$$

所以 $c=\frac{1}{\mathrm{e}}$，故 $\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

密 封 线 内 不 要 答 题

姓名________ 考号________ 科类________

绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学（二）

全真模拟（五）

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分．满分 150 分．考试时间 150 分钟．

题 号	一	二	三	总 分	统分人签字
分 数					

第Ⅰ卷（选择题，共 40 分）

得 分	评卷人

一、选择题（1～10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1．设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ 【 】

A．-1　B．1　C．2　D．3

2．函数 $y=x+\cos x$ 在 $(0,2\pi)$ 内 【 】

A．单调增加　B．单调减少　C．不单调　D．不连续

3．设 $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+C$，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-\sin x)\cos x\mathrm{d}x=$ 【 】

A．1　B．-1　C．$\dfrac{\pi^2}{4}$　D．$-\dfrac{\pi^2}{4}$

4．设在 (a,b) 内有 $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int g'(x)\mathrm{d}x$，则在 (a,b) 内必定有 【 】

A．$f(x)-g(x)=0$　B．$f(x)-g(x)=C$

C．$\mathrm{d}f(x)\neq \mathrm{d}g(x)$　D．$f(x)\mathrm{d}x=g(x)\mathrm{d}x$

5．设 $f(x)$ 是可导函数，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=1$，则 $f'(x_0)=$ 【 】

A．1　B．0　C．2　D．$\dfrac{1}{2}$

6．$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\sin t^2\mathrm{d}t=$ 【 】

A．$2x\cos x^4$　B．$x^2\cos x^4$

C．$2x\sin x^4$　D．$x^2\sin x^4$

7．当 $x\to 1$ 时，$\dfrac{1-x}{1+x}$ 是 $1-\sqrt{x}$ 的 【 】

A．高阶无穷小　B．低阶无穷小

C．等价无穷小　D．不可比较

8．曲线 $ye^x+\ln y=1$，在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 【 】

A．$y-1=-\dfrac{x}{2}$　B．$y=-\dfrac{1}{2}(x-1)$

C．$y-1=-\dfrac{x}{3}$　D．$y-1=-\dfrac{x}{4}$

9．曲线 $y=3x^2-x^3$ 的凸区间为 【 】

A．$(-\infty,1)$　B．$(1,+\infty)$

C．$(-\infty,0)$　D．$(0,+\infty)$

10．事件 A,B 满足 $AB=A$，则 A 与 B 的关系为 【 】

A．$A=B$　B．$A\subset B$　C．$A\supset B$　D．$A=\overline{B}$

第Ⅱ卷（非选择题，共 110 分）

得 分	评卷人

二、填空题（11～20 小题，每小题 4 分，共 40 分）

11．$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=$ ________．

12．$\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t-\sqrt{t}}{\sqrt{t}-1}=$ ________．

13．$y=\dfrac{1}{1+\tan x}$，则 $y'=$ ________．

14．设 $y=\sin x$，则 $y^{(10)}=$ ________．

15．$y=y(x)$ 由方程 $xy=e^{y-x}$ 确定，则 $\mathrm{d}y=$ ________．

16．已知 $\int k\tan 2x\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}\ln|\cos 2x|+C$，则 $k=$ ________．

17．$\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x^3}\mathrm{d}x=$ ________．

18．设 $z=\arctan\sqrt{\dfrac{y}{x}}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ ________．

19．设 $z=e^{\sin x}\cos y$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=$ ________．

20．$\int_e^{e^2}\ln x\mathrm{d}x=$ ________．

得 分	评卷人

三、解答题(21 ～ 28 题,共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21.(本题满分 8 分)

设 $y=(\tan x)^{\frac{1}{x}}$,求 $\mathrm{d}y$.

22.(本题满分 8 分)

设 $x_1=1, x_2=2$ 均为 $y=a\ln x+bx^2+3x$ 的极值点,求 a,b.

23.(本题满分 8 分)

计算$\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

24.(本题满分 8 分)

设 $z=\ln(x^2-y^2)$,其中 $y=\mathrm{e}^x$,求$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

25.(本题满分 8 分)

某运动员投篮命中率为 0.3,求一次投篮时投中次数的概率分布及分布函数.

26.(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是连续函数,且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$,求 $f(x)$.

27.(本题满分 10 分)

求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} t\mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t}{x^6}$.

28.(本题满分 10 分)

试用夹逼定理证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{3+x}\,\mathrm{d}x=0$.

密 封 线 内 不 要 答 题

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数在一点处连续的知识点.

【应试指导】 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处既左连续又右连续，所以 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{x}=2=f(0)=a$，故 $a=2$.

2.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了函数的单调性的知识点.

【应试指导】 由 $y=x+\cos x$，所以 $y'=1-\sin x\geqslant0(0<x<2\pi)$，故 y 在 $(0,2\pi)$ 内单调增加.

3.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】 由 $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+C$，知 $\int f(-\sin x)\cos x\mathrm{d}x=\int f(-\sin x)\mathrm{d}\sin x=-\int f(-\sin x)\mathrm{d}(-\sin x)=-(-\sin x)^2+C=-\sin^2x+C$，所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(-\sin x)\cos x\mathrm{d}x=-\sin^2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-1$.

4.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 由 $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int g'(x)\mathrm{d}x$，得 $\int[f'(x)-g'(x)]\mathrm{d}x=0$，即 $f'(x)-g'(x)=0$，又 $\int[f'(x)-g'(x)]\mathrm{d}x=\int0\mathrm{d}x=0$，故 $f(x)-g(x)-C=0$，所以 $f(x)-g(x)=C$.

5.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了导数的定义的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=1$ 与 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 相比较，可得 $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{2h}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=\dfrac{1}{2}$.

注令 $2h=t$，由 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(x_0+t)-f(x_0)}{\frac{1}{2}t}=1$，也可得出 $f'(x_0)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}=\dfrac{1}{2}$.

6.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了变上限积分求导的知识点.

【应试指导】 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\sin t^2\mathrm{d}t=\sin(x^2)^2\cdot(x^2)'=2x\sin x^4$.

7.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了无穷小量阶的比较的知识点.

【应试指导】 由 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{1-x}{1+x}}{1-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+\sqrt{x}}{1+x}=1$，所以当 $x\to1$ 时，$\dfrac{1-x}{1+x}$ 与 $1-\sqrt{x}$ 是等价无穷小.

8.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了曲线上一点处的切线方程的知识点.

【应试指导】 由 $ye^x+\ln y=1$，两边对 x 求导得 $y'e^x+ye^x+\dfrac{1}{y}\cdot y'=0$，即 $y'=\dfrac{-ye^x}{e^x+\frac{1}{y}}$，所以 $y'\Big|_{(0,1)}=-\dfrac{1}{2}$，

故切线方程为 $y-1=-\dfrac{x}{2}$.

9.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了曲线的凸区间的知识点.

【应试指导】 $y=3x^2-x^3$，$y'=6x-3x^2$，$y''=6-6x=6(1-x)$，显然当 $x>1$ 时，$y''<0$；而当 $x<1$ 时，$y''>0$. 故在 $(1,+\infty)$ 内曲线为凸弧.

10.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了事件的关系的知识点.

【应试指导】 $AB=A$，则 $A\subset AB$（$AB\subset A$，按积的定义是当然的），即当 $\omega\in A$ 时，必有 $\omega\in AB$，因而 $\omega\in B$，故 $A\subset B$.

二、填空题

11.【答案】 e^2

【考情点拨】 本题考查了 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ 的应用的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}}=\dfrac{e}{e^{-1}}=e^2$.

本题还可如下解出：

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{x^2-1}\cdot\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{x^2-1}{2}}\right]^{\frac{x^2-1}{2}\cdot2}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)=e^2.$$

12.【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{t\to1}\dfrac{t-\sqrt{t}}{\sqrt{t}-1}=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{\sqrt{t}(\sqrt{t}-1)}{\sqrt{t}-1}=1$.

注本题也可用洛必达法则计算.

13.【答案】 $-\dfrac{1}{(\cos x+\sin x)^2}$

【考情点拨】 本题考查了一元函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 $y=\dfrac{1}{1+\tan x}$，则 $y'=\dfrac{-\sec^2x}{(1+\tan x)^2}=\dfrac{-\sec^2x}{\frac{(\cos x+\sin x)^2}{\cos^2x}}=-\dfrac{1}{(\cos x+\sin x)^2}$.

14.【答案】 $-\sin x$

【考情点拨】 本题考查了一元函数的高阶导数的知识点.

【应试指导】 由 $y=\sin x$，且 $y^{(n)}=\sin\left(n\cdot\dfrac{\pi}{2}+x\right)$，则 $y^{(10)}=\sin\left(10\times\dfrac{\pi}{2}+x\right)=\sin(5\pi+x)=\sin(\pi+x)=-\sin x$.

15.【答案】 $\dfrac{y+e^{y-x}}{e^{y-x}-x}\mathrm{d}x$

【考情点拨】 本题考查了隐函数的微分的知识点.

【应试指导】 方程 $xy=e^{y-x}$ 两边对 x 求导，y 为 x 的函数，有 $y+xy'=e^{y-x}\cdot(y'-1)$ 解得 $\mathrm{d}y=\dfrac{y+e^{y-x}}{e^{y-x}-x}\mathrm{d}x$.

16.【答案】 $-\dfrac{4}{3}$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int k\tan2x\mathrm{d}x=k\int\dfrac{\sin2x}{\cos2x}\mathrm{d}x=\dfrac{k}{2}\int\dfrac{\sin2x}{\cos2x}\mathrm{d}(2x)=\dfrac{-k}{2}\int\dfrac{\mathrm{d}\cos2x}{\cos2x}=\dfrac{-k}{2}\cdot\ln|\cos2x|+C$，与

$\frac{2}{3}\ln|\cos 2x|+C$ 比较，得 $k=-\frac{4}{3}$.

17.【答案】 $\frac{1}{8}$

【考情点拨】 本题考查了无穷区间的反常积分的知识点.

【应试指导】 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x=\lim\limits_{a\to+\infty}\int_2^{a}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x=\lim\limits_{a\to+\infty}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\Big|_2^a\right]=\lim\limits_{a\to+\infty}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a^2}\right)=\frac{1}{8}$.

18.【答案】 $-\frac{1}{2(x+y)}\sqrt{\frac{y}{x}}$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{y}{x}}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{1}{2(x+y)}\sqrt{\frac{y}{x}}$.

19.【答案】 $-\mathrm{e}^{\sin x}\cos x\sin y$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的混合偏导数的知识点.

【应试指导】 由 $z=\mathrm{e}^{\sin x}\cos y$，则 $\frac{\partial z}{\partial y}=-\mathrm{e}^{\sin x}\sin y$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\mathrm{e}^{\sin x}\cos x\sin y$.

20.【答案】 e^2

【考情点拨】 本题考查了分部积分法的知识点.

【应试指导】 $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\ln x\mathrm{d}x=x\ln x\Big|_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}-\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^2-\mathrm{e}-x\Big|_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}=2\mathrm{e}^2-\mathrm{e}-\mathrm{e}^2+\mathrm{e}=\mathrm{e}^2$.

三、解答题

21. 由 $y=(\tan x)^{\frac{1}{x}}$，则 $\ln y=\frac{1}{x}\ln\tan x$，两边对 x 求导有

$$\frac{1}{y}y'=-\frac{1}{x^2}\ln\tan x+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\tan x}\sec^2 x,$$

所以 $y'=(\tan x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{\sec^2 x}{\tan x}-\frac{1}{x^2}\ln\tan x\right)$，

故 $\mathrm{d}y=(\tan x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{\sec^2 x}{x\tan x}-\frac{1}{x^2}\ln\tan x\right)\mathrm{d}x$.

22. 由 $y=a\ln x+bx^2+3x$，则 $y'=\frac{a}{x}+2bx+3$.

因为 $x_1=1,x_2=2$ 是极值点，所以 $y'|_{x=1}=0,y'|_{x=2}=0$，即

$$\begin{cases}a+2b+3=0,\\ \frac{a}{2}+4b+3=0,\end{cases}$$

解得 $a=-2,b=-\frac{1}{2}$.

23. $\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\int\frac{\mathrm{e}^x+1-1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}\mathrm{e}^x$

$=\int\left(1-\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}\mathrm{e}^x$

$=\mathrm{e}^x-\ln(1+\mathrm{e}^x)+C.$

另解，令 $\mathrm{e}^x=t$，则 $x=\ln t$，$\mathrm{d}x=\frac{1}{t}\mathrm{d}t$，

$\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\frac{t^2}{(1+t)t}\mathrm{d}t=\int\frac{t}{1+t}\mathrm{d}t$

$=\int\frac{t+1-1}{1+t}\mathrm{d}t$

$=\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$

$=t-\ln(1+t)+C$

$=\mathrm{e}^x-\ln(1+\mathrm{e}^x)+C.$

24. $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x^2-y^2}\cdot 2x+\frac{1}{x^2-y^2}(-2y)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$=\frac{2x}{x^2-y^2}-\frac{2y\cdot\mathrm{e}^x}{x^2-y^2}$

$=\frac{2x-2\mathrm{e}^{2x}}{x^2-\mathrm{e}^{2x}}$.

25. 这次投篮的投中次数是随机变量，设其为 X，它可能取的值为 $0,1$，$X=0$ 表示投中 0 次，即投篮未中，$P\{X=0\}=1-0.3=0.7$；$X=1$ 表示投中一次，$P\{X=1\}=0.3$，故概率分布为

X	0	1
P	0.7	0.3

分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.7, & 0\leqslant x<1,\\ 0.7+0.3=1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

26. 令 $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=c$，则由题设知 $f(x)=x+2c$，

所以 $c=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(x+2c)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1+2c=\frac{1}{2}+2c$，

故 $c=-\frac{1}{2}$，因此 $f(x)=x-1$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}t\mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t}{x^6}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\mathrm{e}^{x^2}\sin x^2\cdot 2x}{6x^5}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\mathrm{e}^{x^2}\sin x^2}{6x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}\cdot x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$.

28. 由 $\sqrt{3}\leqslant\sqrt{3+x}\leqslant 2\quad x\in[0,1]$，

则 $\sqrt{3}\cdot x^n\leqslant\sqrt{3+x}\cdot x^n\leqslant 2x^n$.

所以 $\sqrt{3}\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\sqrt{3+x}\cdot x^n\mathrm{d}x\leqslant 2\int_0^1 x^n\mathrm{d}x$，

即 $\sqrt{3}\frac{1}{n+1}\leqslant\int_0^1\sqrt{3+x}\cdot x^n\mathrm{d}x\leqslant 2\cdot\frac{1}{n+1}$.

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3}}{n+1}\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\sqrt{3+x}\cdot x^n\mathrm{d}x\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}$，

即 $0\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\sqrt{3+x}\cdot x^n\mathrm{d}x\leqslant 0$.

故由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{3+x}\mathrm{d}x=0$.

绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学（二）

全真模拟（六）

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分．满分 150 分．考试时间 150 分钟．

题　号	一	二	三	总　分	统分人签字
分　数					

密封线内不要答题

科类________ 考号________ 姓名________

第Ⅰ卷（选择题，共 40 分）

得　分	评卷人

一、选择题（1～10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. $\int \sin 2x\,\mathrm{d}x =$ 【　】

A. $\cos 2x + C$　B. $-\cos 2x + C$

C. $\frac{1}{2}\cos 2x + C$　D. $-\frac{1}{2}\cos 2x + C$

2. 若 $f(x)$ 为偶函数，则$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 【　】

A. 奇函数　B. 偶函数

C. 非奇非偶函数　D. 周期函数

3. 称 e^{-x} 是无穷小量是指在下列哪一过程中它是无穷小量 【　】

A. $x\to 0$　B. $x\to\infty$　C. $x\to+\infty$　D. $x\to-\infty$

4. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$，则 $f(x)$ 在 x_0 点 【　】

A. 一定有定义　B. 一定有 $f(x_0)=A$

C. 一定连续　D. 极限一定存在

5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x\sqrt{x}}$，则 $f'(1) =$ 【　】

A. $-\frac{1}{6}$　B. $\frac{5}{6}$　C. $-\frac{5}{6}$　D. $\frac{1}{6}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} =$ 【　】

A. 1　B. $\frac{1}{2}$　C. 2　D. 不存在

7. 函数 $f(x) = (x^2-1)^3+1$，在 $x=1$ 处 【　】

A. 有极大值 1　B. 有极小值 1

C. 有极小值 0　D. 无极值

8. 曲线 $y = 2 + (x-4)^{\frac{1}{3}}$ 的拐点为 【　】

A. $(4,2)$　B. $x=4$

C. $y=2$　D. $(2,4)$

9. $\int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x =$ 【　】

A. 0　B. $\frac{1}{4}(e^2+1)$

C. $\frac{1}{4}(e^2-1)$　D. e^2-1

10. 已知离散型随机变量 X 的概率分布为

X	0	1
P	0.5	0.5

则 $E(X) =$ 【　】

A. 0　B. 1　C. 0.5　D. 1.5

第Ⅱ卷（非选择题，共 110 分）

得　分	评卷人

二、填空题（11～20 小题，每小题 4 分，共 40 分）

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\tan 2x} =$ ________．

12. 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，又 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = 1$，则 $f(x_0) =$ ________．

13. 设曲线 $y = x^2+x-2$ 在点 M 处切线的斜率为 2，则点 M 的坐标为________．

14. $y = x^2 e^{\frac{1}{x}} - a^x (a>0, a\neq 1)$，则 $y' =$ ________．

15. $\int\frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x =$ ________．

16. $\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x =$ ________．

17. 若 $f(x)$ 是奇函数，且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$，则$\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x =$ ________．

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x+\frac{1}{2}} =$ ________．

19. 设 $z = (\sin x)^{\cos y}(0<x<\pi)$，则 $\mathrm{d}z =$ ________．

20. 设 $z = \ln(x^2+y^2)$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} =$ ________．

得　分	评卷人

三、解答题(21～28 题,共 70 分.解答应写出推理、演算步骤)

21.(本题满分 8 分)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a(1-\cos 2x)}{x^2}, & x<0,\\ 4, & x=0,\\ \dfrac{b\sin x+\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t}{x}, & x>0\end{cases}$$ 在 $x=0$ 处连续,试确定 a,b 的值.

22.(本题满分 8 分)

求曲线 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 的水平渐近线和铅直渐近线.

23.(本题满分 8 分)

求 $\displaystyle\int\frac{1}{\cos^2 x\sqrt{2+3\tan x}}\mathrm{d}x$.

24.(本题满分 8 分)

求函数 $z=2x^3+3y^2$ 在 $x=10,y=8,\Delta x=0.2,\Delta y=0.3$ 时的全增量与全微分.

25.(本题满分 8 分)

某单位有 3 部汽车,每天每部车需检修的概率为 $\dfrac{1}{5}$,各部车是否需检修是相互独立的,求一天内恰有 2 部车需检修的概率.

26.(本题满分 10 分)

已知函数 $y=f(x)$ 满足方程 $\mathrm{e}^{xy}+\sin(x^2y)=y$,求 $y=f(x)$ 在点(0,1)处的切线方程.

27.(本题满分 10 分)

计算 $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$.

28.(本题满分 10 分)

证明:$2^x>x^2(x>4)$.

密封线内不要答题

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \sin 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \sin 2x\mathrm{d}2x=\frac{1}{2}(-\cos 2x)+C.$

2.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】 记 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,

则 $F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t\xlongequal{t=-u}\int_0^x f(-u)(-\mathrm{d}u)$(因 $f(x)$ 为偶函数,故 $f(x)=f(-x)$)$=-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=-F(x)$,

所以 $F(x)$ 是奇函数.

3.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了无穷小量的知识点.

【应试指导】 因 $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{-x}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}=+\infty$,故 $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x}$ 不存在,应选 C.

4.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 从左右极限存在,可推出 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,但不能推出其他几个结论,故选 D.

5.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了一元函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 因 $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}=x^{-\frac{2}{3}}-x^{-\frac{3}{2}}$,所以 $f'(x)=-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}+\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$,故 $f'(1)=-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{5}{6}$.

6.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 的应用的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}.$

7.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了函数的极值的知识点.

【应试指导】 $f(x)=(x^2-1)^3+1$,则 $f'(x)=6x(x^2-1)^2$,令 $f'(x)=0$,得驻点 $x_1=-1,x_2=0,x_3=1$,当 $0<x<1$ 时,$f'(x)>0$,当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$,故 $f(x)$ 在 $x_3=1$ 处不取极值.

8.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了曲线的拐点的知识点.

【应试指导】 $y=2+(x-4)^{\frac{1}{3}}$, $y'=\frac{1}{3}(x-4)^{-\frac{2}{3}}$, $y''=-\frac{2}{9}(x-4)^{-\frac{5}{3}}$,函数在 $x=4$ 处连续,当 $x<4$ 时,$y''>0$;当 $x>4$ 时,$y''<0$,所以点 $(4,2)$ 为曲线的拐点.

9.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了分部积分法的知识点.

【应试指导】 $\int_1^{\mathrm{e}}x\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\left(x^2\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}x^2\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^2-\frac{1}{2}x^2\Big|_1^{\mathrm{e}}\right)=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^2+1).$

10.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了数学期望的知识点.

【应试指导】 由题意知,$E(X)=0\times 0.5+1\times 0.5=0.5.$

二、填空题

11.【答案】 $\frac{5}{2}$

【考情点拨】 本题考查了等价无穷小代换的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\tan 2x}{2x}}\cdot\frac{5x}{2x}=\frac{5}{2}.$

注用洛必达法则也可解出.但最简便的方法是用等价无穷小代换.

12.【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了函数可导的定义的知识点.

【应试指导】 $f(x)$ 在 x_0 可导,则 $f(x)$ 在 x_0 处连续,因此 $f(x)$ 在 x_0 处左连续,于是,$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$,而 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=1$,故 $f(x_0)=1$.

13.【答案】 $\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{4}\right)$

【考情点拨】 本题考查了曲线上一点处的切线的知识点.

【应试指导】 $y=x^2+x-2$, $y'=2x+1$,由导数的几何意义可知,若点 M 的坐标为 (x_0,y_0),则 $2x_0+1=2$,解得 $x_0=\frac{1}{2}$, $y_0=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-2=-\frac{5}{4}$.

14.【答案】 $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(2x-1)-a^x\ln a$

【考情点拨】 本题考查了一元函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 $y'=2x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)-a^x\ln a=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(2x-1)-a^x\ln a.$

15.【答案】 $\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int\frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^2+2x+1+4}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(x+1)^2+4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C.$

16.【答案】 $\frac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了无穷区间的反常积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{1}{2}\int_0^a\frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}(x^2+1)=\frac{1}{2}\lim\limits_{a\to+\infty}\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)\Big|_0^a=\frac{1}{2}\lim\limits_{a\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+a^2}\right)=\frac{1}{2}.$

注根据本题结构特点,容易想到凑微分,$2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}x^2=\mathrm{d}(x^2+1)$.

17.【答案】 -1

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】 若 $f(x)$ 是奇函数，则 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 0$，即 $\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 0$，所以 $\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = -1$. 注若 $f(x)$ 是偶函数，则 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

18.【答案】 e^{-1}

【考情点拨】 本题考查了 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$ 的应用的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x+\frac{1}{2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{1+x}\right)^{\frac{1+x}{-1}\cdot(-1)-\frac{1}{2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{1+x}\right)^{\frac{1+x}{-1}\cdot(-1)}\left(1+\frac{-1}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}} = e^{-1}$.

注：此题也可考虑取对数后，利用洛必达法则，但这样较繁.

19.【答案】 $\cos x\cos y(\sin x)^{\cos y-1}\mathrm{d}x - \sin y(\sin x)^{\cos y}\cdot\ln\sin x\mathrm{d}y$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】 由 $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos y\cdot(\sin x)^{\cos y-1}\cdot\cos x$，$\frac{\partial z}{\partial y} = (\sin x)^{\cos y}\cdot\ln\sin x\cdot(-\sin y)$，所以 $\mathrm{d}z = \cos x\cos y(\sin x)^{\cos y-1}\mathrm{d}x - \sin y(\sin x)^{\cos y}\ln\sin x\mathrm{d}y$.

20.【答案】 2

【考情点拨】 本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 由 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}$，$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$，所以 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x^2}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} = 2$.

三、解答题

21. 由 $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-}\frac{a(1-\cos 2x)}{x^2}$

$= \lim\limits_{x\to0^-}\frac{a\cdot 2\sin 2x}{2x} = 2a$，

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{b\sin x + \int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t}{x}$

$= \lim\limits_{x\to0^+}(b\cos x + \cos x^2)$

$= b+1$，

又因 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $b+1 = 2a = 4$，

解得 $a=2$，$b=3$.

22. 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x} = -\infty$，

所以 $x=0$ 是曲线的铅直渐近线，

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$，

所以 $y=0$ 是曲线的水平渐近线.

23. 因 $\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \sec^2 x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\tan x$，

所以 $\int\frac{1}{\cos^2 x\sqrt{2+3\tan x}}\mathrm{d}x = \int\frac{1}{\sqrt{2+3\tan x}}\mathrm{d}\tan x$

$= \frac{1}{3}\int\frac{1}{\sqrt{2+3\tan x}}\mathrm{d}(2+3\tan x)$

$= \frac{2}{3}\sqrt{2+3\tan x} + C$.

24. 记 $F(x,y) = 2x^3 + 3y^2$，则 $\frac{\partial F}{\partial x} = 6x^2$，$\frac{\partial F}{\partial y} = 6y$.

故 $\Delta z = F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y)$

$= F(10.2, 8.3) - F(10,8)$

$= 2\ 329.086 - 2\ 192 = 137.086$.

又因 $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(10,8)} = 600$，$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(10,8)} = 48$，

所以 $\left.\mathrm{d}z\right|_{(10,8)} = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(10,8)}\times0.2 + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(10,8)}\times0.3 = 120 + 14.4 = 134.4$.

25. 需检修的车数为随机变量，设其为 X，依题意

$X\sim B\left(3,\frac{1}{5}\right)$，则 $P\{X=2\} = C_3^2\times\left(\frac{1}{5}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{5}\right)^{3-2} = 0.096$.

26. 方程两边对 x 求导得

$e^{xy}(y+xy') + \cos(x^2y)\cdot(2xy + x^2y') = y'$，

将 $x=0$，$y=1$ 代入得 $y'=1$，

所以点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y-1=x$，即 $y=x+1$.

注：本题不必把 y' 解出后，再求 $y'|_{x=0}$，那样太麻烦.

27. 令 $\sqrt{2x+1} = t$，则 $x = \frac{1}{2}(t^2-1)$，$\mathrm{d}x = t\mathrm{d}t$.

所以 $\int e^{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x = \int e^t\cdot t\mathrm{d}t$

$= te^t - \int e^t\mathrm{d}t = te^t - e^t + C$

$= e^{\sqrt{2x+1}}(\sqrt{2x+1}-1) + C$.

28. 令 $f(x) = 2^x - x^2\ (x>4)$，则 $f'(x) = 2^x\ln2 - 2x$，由于此式不便判定符号，故再求出 $f''(x)$.

又因 $f''(x) = 2^x\ln^2 2 - 2 > 2^4\ln^2 2 - 2 = 2(2\ln4\cdot\ln4 - 1) > 0$，所以 $f'(x)$ 单调增加，故 $f'(x) > f'(4) = 2^4\ln2 - 8 = 8(2\ln2-1) = 8(\ln4-1) > 0$，

得到 $f(x)$ 单调增加，故 $f(x) > f(4)$，即 $2^x - x^2 > f(4) = 2^4 - 4^2 = 0$，

因此 $2^x > x^2\ (x>4)$.