密封线内不要答题

绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学(一)

全真模拟(一)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.满分150分.考试时间150分钟.

题　号	一	二	三	总　分	统分人签字
分　数					

第Ⅰ卷(选择题,共40分)

得　分	评卷人

一、选择题(1~10小题,每小题4分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 当 $x\to 0$ 时,下列变量中为无穷小的是　　【　　】

A. $\lg|x|$　　B. $\sin\frac{1}{x}$

C. $\cot x$　　D. $\sqrt{1+x}-1$

2. 下列等式成立的是　　【　　】

A. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}=1$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{2x}=1$

3. 设函数 $f(x)=2\ln x+e^x$,则 $f'(2)$ 等于　　【　　】

A. e　　B. 1

C. $1+e^2$　　D. ln2

4. 设函数 $f(x)=(1+x)e^x$,则函数 $f(x)$　　【　　】

A. 有极小值　　B. 有极大值

C. 既有极小值又有极大值　　D. 无极值

5. $\int_{-1}^{1}x^4\mathrm{d}x=$　　【　　】

A. $\frac{2}{5}$　　B. 0

C. $-\frac{2}{5}$　　D. $\frac{1}{2}$

6. 下列各式中正确的是　　【　　】

A. $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x>\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$　　B. $\int_1^2\ln x\mathrm{d}x>\int_1^2(\ln x)^2\mathrm{d}x$

C. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b\arcsin x\mathrm{d}x=\arcsin x$　　D. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=0$

7. 下列反常积分收敛的是　　【　　】

A. $\int_0^{+\infty}e^x\mathrm{d}x$　　B. $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$

C. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$　　D. $\int_1^{+\infty}x^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$

8. 方程 $x^2+y^2-z^2=0$ 表示的二次曲面是　　【　　】

A. 球面　　B. 旋转抛物面

C. 圆柱面　　D. 圆锥面

9. 函数 $\frac{1}{3-x}$ 在 $(-3,3)$ 内展开成 x 的幂级数是　　【　　】

A. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n$　　B. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}}$

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}}$

10. 微分方程 $y''-2y=e^x$ 的特解形式应设为　　【　　】

A. $y^*=Ae^x$　　B. $y^*=Axe^x$

C. $y^*=2e^x$　　D. $y^*=e^x$

第Ⅱ卷(非选择题,共110分)

得　分	评卷人

二、填空题(11~20小题,每小题4分,共40分)

11. 函数 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}, & x<0,\\ \frac{a+x^2}{6}, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 连续,此时 $a=$__________.

12. 若 $f'(x_0)=1$, $f(x_0)=0$,则 $\lim\limits_{h\to\infty}hf\left(x_0-\frac{1}{h}\right)=$__________.

13. 设 $y=(\tan x)^{\frac{1}{x}}$,则 $y'=$__________.

14. 函数 $y=\cos x$ 在 $[0,2\pi]$ 上满足罗尔定理,则 $\xi=$__________.

15. $\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=$__________.

16. $\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{4-x}}\mathrm{d}x=$__________.

17. 将积分 $I=\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^{2x}f(x,y)\mathrm{d}y$ 改变积分顺序,则 $I=$__________.

18. 幂级数$\frac{1}{1\times3}x+\frac{1}{2\times3^2}x^2+\frac{1}{3\times3^3}x^3+\cdots$的收敛半径为____________.

19. 微分方程 $y''+y=0$ 的通解是____________.

20. 设 $f(x,y)=\sin(xy^2)$，则 $\mathrm{d}f(x,y)=$____________.

得　分	评卷人

三、解答题(21～28 题，共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21.（本题满分 8 分）

求函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$的二阶导数 y''.

22.（本题满分 8 分）

求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x\right]$.

23.（本题满分 8 分）

求$\int\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$.

24.（本题满分 8 分）

求函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y)$的极值.

25.（本题满分 8 分）

设 $z=\ln\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$，求 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$.

26.（本题满分 10 分）

计算$\iint\limits_D\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=x,y=2x,x=2$ 与 $x=4$ 围成.

27.（本题满分 10 分）

求由曲线 $y^2=(x-1)^3$ 和直线 $x=2$ 所围成的图形绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积.

28.（本题满分 10 分）

已知$\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t=1-\cos x$，证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=1$.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了无穷小量的知识点.

【应试指导】 $x\to0$ 时，$\lg|x|\to-\infty$，$\sin\frac{1}{x}$ 无极限，$\cot x\to\infty$，$\sqrt{1+x}-1\to0$，故选 D.

2.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数的极限的知识点.

【应试指导】 由$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x^2}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin x^2}{x^2}=0$；$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x^2}=\infty$；$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$；$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{2x}=0$. 故选 C.

3.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数在一点的导数的知识点.

【应试指导】 因 $f(x)=2\ln x+e^x$，于是 $f'(x)=\frac{2}{x}+e^x$，故 $f'(2)=1+e^2$.

4.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了函数极值的知识点.

【应试指导】 因 $f(x)=(1+x)e^x$，且处处可导，于是，$f'(x)=e^x+(1+x)\cdot e^x=(x+2)e^x$，令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=-2$；又 $x<-2$ 时，$f'(x)<0$；$x>-2$ 时，$f'(x)>0$；从而 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处取得极小值，且 $f(x)$ 只有一个极值.

5.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_{-1}^{1}x^4\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x^4\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x^4\mathrm{d}x=2\int_{0}^{1}x^4\mathrm{d}x=2\cdot\frac{1}{5}x^5\Big|_0^1=\frac{2}{5}$.

6.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】 对于选项 A，当 $0<x<1$ 时，$x^3<x^2$，则 $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x<\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$. 对于选项 B，当 $1<x<2$ 时，$\ln x>(\ln x)^2$，则 $\int_1^2\ln x\mathrm{d}x>\int_1^2(\ln x)^2\mathrm{d}x$. 对于选项 C，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b\arcsin x\mathrm{d}x=0\left(因\int_a^b\arcsin x\mathrm{d}x 是一个常数\right)$. 对于选项 D，$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=0$ 不成立，因为当 $x=0$ 时，$\frac{1}{x}$ 无意义.

7.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了反常积分的敛散性的知识点.

【应试指导】 对于选项 A，$\int_0^{+\infty}e^x\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b e^x\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}(e^b-1)$ 不存在，此积分发散；对于选项 B，$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_e^b\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\left[\ln(\ln x)\Big|_e^b\right]=\lim\limits_{b\to+\infty}\ln(\ln b)$ 不存在，此积分发散；对于选项 C，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}(2\sqrt{b}-2)$ 不存在，此积分发散；对于选项 D，$\int_1^{+\infty}x^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(2-\frac{2}{\sqrt{b}}\right)=2$，故此积分收敛.

8.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了二次曲面(圆锥面)的知识点.

【应试指导】 因方程可化为，$z^2=x^2+y^2$，由方程可知它表示的是圆锥面.

9.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数展开为幂级数的知识点.

【应试指导】 因 $\frac{1}{3-x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}}$，故选 B.

10.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了二阶线性微分方程的特解形式的知识点.

【应试指导】 由方程知，其特征方程为，$r^2-2=0$，有两个特征根 $r=\pm\sqrt{2}$. 又自由项 $f(x)=e^x$，$\lambda=1$ 不是特征根，故特解 y^* 可设为 Ae^x.

二、填空题

11.【答案】 0

【考情点拨】 本题考查了函数在一点处的连续性的知识点.

【应试指导】 由 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{a+x^2}{6}=\frac{a}{6}$，且 $f(0)=\frac{a}{6}$，又因 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $\frac{a}{6}=0$，所以 $a=0$.

12.【答案】 -1

【考情点拨】 本题考查了利用导数定义求极限的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{h\to\infty}hf\left(x_0-\frac{1}{h}\right)=\lim\limits_{h\to\infty}\frac{f\left(x_0-\frac{1}{h}\right)-f(x_0)}{\frac{1}{h}}\xlongequal{t=\frac{1}{h}}\lim\limits_{t\to0}(-1)\cdot\frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{-t}=-f'(x_0)=-1$.

13.【答案】 $(\tan x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{\sec^2x}{x\tan x}-\frac{1}{x^2}\ln\tan x\right)$

【考情点拨】 本题考查了函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 $y=(\tan x)^{\frac{1}{x}}$，则 $\ln y=\frac{1}{x}\ln\tan x$. 所以 $\frac{1}{y}y'=\frac{\frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2x\cdot x-\ln\tan x}{x^2}$，则 $y'=y\cdot\frac{x\sec^2x-\tan x\ln\tan x}{x^2\tan x}=(\tan x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x\sec^2x-\tan x\ln\tan x}{x^2\tan x}=(\tan x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{\sec^2x}{x\tan x}-\frac{1}{x^2}\ln\tan x\right)$.

注：本题另解如下：

$$y'=[(\tan x)^{\frac{1}{x}}]'=\{e^{[\ln(\tan x)^{\frac{1}{x}}]}\}'=(e^{\frac{1}{x}\ln\tan x})'=e^{\frac{1}{x}\ln\tan x}\cdot\left(\frac{\ln\tan x}{x}\right)'=(\tan x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x\frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2x-\ln\tan x}{x^2}$$

$$=(\tan x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{\sec^2x}{x\tan x}-\frac{1}{x^2}\ln\tan x\right).$$

14.【答案】 π

【考情点拨】 本题考查了罗尔定理的知识点.

【应试指导】 $\cos2\pi-\cos0=y'\Big|_{x=\xi}\cdot(2\pi-0)$，即 $0=-\sin\xi\cdot2\pi$，所以 $\sin\xi=0$，故 $\xi=\pi$.

15.【答案】 $x-\arctan x+C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=x-\arctan x+C$.

16.【答案】 $\frac{\pi}{6}$

【考情点拨】 本题考查了利用换元法求定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{4-x}}\mathrm{d}x\xlongequal{\sqrt{x}=t}\int_1^{\sqrt{2}}\frac{2t}{t\sqrt{4-t^2}}\mathrm{d}t=2\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{4-t^2}}\mathrm{d}t\xlongequal{t=2\sin u}2\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{1}{2\cos u}2\cos u\mathrm{d}u=2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}$.

17.【答案】 $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{y/2}^{y}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_2^4\mathrm{d}y\int_{y/2}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x$

【考情点拨】 本题考查了改变积分顺序的知识点.

【应试指导】 由 $I=\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^{2x}f(x,y)\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,x\leqslant y\leqslant 2x\}$，$D$ 还可有另一种表示方法，$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 2,\frac{y}{2}\leqslant x\leqslant y\}\cup\{(x,y)\mid 2\leqslant y\leqslant 4,\frac{y}{2}\leqslant x\leqslant 2\}$，所以 $I=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{y}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_2^4\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x$.

18.【答案】 3

【考情点拨】 本题考查了幂级数的收敛半径的知识点.

【应试指导】 所给幂级数通项为 $\frac{1}{n\times3^n}x^n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)\times3^{n+1}}}{\frac{1}{n\times3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$，所以收敛半径 $R=3$.

19.【答案】 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$

【考情点拨】 本题考查了二阶线性微分方程的通解的知识点.

【应试指导】 微分方程 $y''+y=0$ 的特征方程是 $r^2+1=0$,故特征根为 $r=\pm i$,所以方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

20.【答案】 $y^2\cos(xy^2)\mathrm{d}x+2xy\cos(xy^2)\mathrm{d}y$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】 $\mathrm{d}f(x,y)=\cos(xy^2)\mathrm{d}(xy^2)=\cos(xy^2)(y^2\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y)=y^2\cos(xy^2)\mathrm{d}x+2xy\cos(xy^2)\mathrm{d}y$.

注:本题也可先求出 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$,而得出 $\mathrm{d}f(x,y)$.

三、解答题

21. $$y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)$$
$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$
$$y''=[(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}]'=-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x$$
$$=-\frac{x}{(\sqrt{1+x^2})^3}.$$

22. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x\right]\xlongequal{\frac{\pi}{2}-x=t}\lim_{t\to 0}\left[t\cdot\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right]$$
$$=\lim_{t\to 0}(t\cdot\cot t)=\lim_{t\to 0}\frac{t\cos t}{\sin t}=1.$$

23. $$\int\ln(1+x^2)\mathrm{d}x=x\ln(1+x^2)-\int x\cdot\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
$$=x\ln(1+x^2)-2\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
$$=x\ln(1+x^2)-2(x-\arctan x)+C.$$

24. $$\frac{\partial f}{\partial x}=2\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y)+\mathrm{e}^{2x}$$
$$=\mathrm{e}^{2x}(1+2x+2y^2+4y),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\mathrm{e}^{2x}(2y+2)=2\mathrm{e}^{2x}(y+1),$$

令 $$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=\mathrm{e}^{2x}(1+2x+4y+2y^2)=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}=2\mathrm{e}^{2x}(y+1)=0,\end{cases}$$

得 $y=-1,x=\frac{1}{2}$.

而 $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\mathrm{e}^{2x}(1+2x+4y+2y^2)+2\mathrm{e}^{2x}$$
$$=\mathrm{e}^{2x}(4+4x+8y+4y^2),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\mathrm{e}^{2x},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4\mathrm{e}^{2x}(y+1),$$

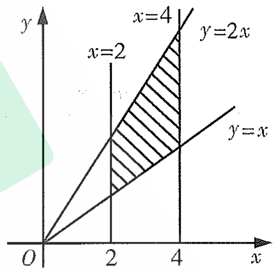
所以在点 $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ 处 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\mathrm{e},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\mathrm{e}$.

因此 $f(x,y)$ 在点 $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ 处 $\Delta=-4\mathrm{e}^2<0$,且 $A>0$,故 $f(x,y)$ 在点 $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ 取得极小值,且极小值为 $-\frac{1}{2}\mathrm{e}$.

25. 由 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{4\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{4\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})},$$

所以 $$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{4\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}+\frac{y}{4\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{1}{4}.$$

26. 积分区域 D 如下图所示.



被积函数 $f(x,y)=\frac{y}{x}$,化为二次积分时对哪个变量皆易于积分;但是区域 D 易于用 X — 型不等式表示,因此选择先对 y 积分,后对 x 积分的二次积分次序.

D 可表示为 $\begin{cases}2\leqslant x\leqslant 4,\\ x\leqslant y\leqslant 2x,\end{cases}$

故 $$\iint_D\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_2^4\mathrm{d}x\int_x^{2x}\frac{y}{x}\mathrm{d}y=\int_2^4\frac{y^2}{2x}\Big|_x^{2x}\mathrm{d}x$$
$$=\int_2^4\frac{3}{2}x\mathrm{d}x=\frac{3}{4}x^2\Big|_2^4=9.$$

27. $V_x=\int_1^2\pi(x-1)^3\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\pi$.

注:本题关键是确定积分区间,曲线为 $y^2=(x-1)^3$.由 $y^2\geqslant 0$ 知 $x-1\geqslant 0$ 即 $x\geqslant 1$,又与直线 $x=2$ 所围成的图形,所以积分区间为 $[1,2]$.

28. 因 $\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t=1-\cos x$,于是

有 $\int_0^x x\cdot f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=1-\cos x$,

即 $x\cdot\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=1-\cos x$,

两边求导得 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)=\sin x$,

从而有 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\sin x$,

故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\mathrm{d}t=\sin\frac{\pi}{2}=1$.

绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学(一)

全真模拟(二)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.满分 150 分.考试时间 150 分钟.

题　号	一	二	三	总　分	统分人签字
分　数					

第Ⅰ卷(选择题,共 40 分)

得　分	评卷人

一、选择题(1～10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. $\lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{1}{x-1}}=$　【　】

A. 0　　B. 1

C. ∞　　D. 不存在但不是∞

2. 设 $f'(1)=1$,则$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^2-1}$等于　【　】

A. -1　　B. 0

C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 1

3. 下列函数中,在 $x=0$ 处可导的是　【　】

A. $y=|x|$　　B. $y=\sqrt{x}$

C. $y=x^3$　　D. $y=\ln x$

4. 函数 $y=e^x+\arctan x$ 在区间$[-1,1]$上　【　】

A. 单调减少　　B. 单调增加

C. 无最大值　　D. 无最小值

5. 曲线 $y=\dfrac{x+x\sin x}{x^2-1}-1$ 的水平渐近线的方程是　【　】

A. $y=2$　　B. $y=-2$

C. $y=1$　　D. $y=-1$

6. 设 $y=\cos x$,则 $y''=$　【　】

A. $\sin x$　　B. $\cos x$

C. $-\cos x$　　D. $-\sin x$

7. 设函数 $z=xy^2+e^{\frac{x}{y}}$,则$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}$等于　【　】

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. -1

8. 二元函数 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极小值点为　【　】

A. $(1,0)$　　B. $(1,2)$

C. $(-3,0)$　　D. $(-3,2)$

9. 设$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^2 f(x,y)\mathrm{d}x$,则积分区域 D 可以表示为　【　】

A. $\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2,\\1\leqslant y\leqslant 2\end{cases}$　　B. $\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2,\\x\leqslant y\leqslant 2\end{cases}$

C. $\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2,\\1\leqslant y\leqslant x\end{cases}$　　D. $\begin{cases}1\leqslant y\leqslant 2,\\1\leqslant x\leqslant y\end{cases}$

10. 下列级数中发散的是　【　】

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{2^n}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}$

第Ⅱ卷(非选择题,共 110 分)

得　分	评卷人

二、填空题(11～20 小题,每小题 4 分,共 40 分)

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{2}{x}}{\sin\frac{4}{x}}=$____________.

12. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)=$____________.

13. 若 $x=at\cos t$,$y=at\sin t$,则$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=$____________.

14. $\int(\tan\theta+\cot\theta)^2\mathrm{d}\theta=$____________.

15. 设 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}+a, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$____________.

16. $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x=$____________.

17. 设函数 $z=x^2e^y$,则全微分 $\mathrm{d}z=$____________.

18. 设 $z=f(x^2+y^2,e^{\frac{x}{y}})$ 可微，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ______.

19. 微分方程 $y''+6y'+13y=0$ 的通解为 ______.

20. 设 D 为 $x^2+y^2\leqslant 4$ 且 $y\geqslant 0$，则 $\iint\limits_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ______.

得　分	评卷人

三、解答题(21～28 题，共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21.（本题满分 8 分）

设 $\sin(t\cdot s)+\ln(s-t)=t$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$ 的值.

22.（本题满分 8 分）

设 $f(x)=\int_x^0 t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，求 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上的最大值.

23.（本题满分 8 分）

如果 $\int f(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}+C$，试求 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

24.（本题满分 8 分）

求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\sin 2x\mathrm{d}x$.

25.（本题满分 8 分）

计算 $\iint\limits_D \dfrac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为圆域 $x^2+y^2\leqslant 9$.

26.（本题满分 10 分）

设 z 是 x,y 的函数，且 $xy=xf(z)+y\varphi(z)$，$xf'(z)+y\varphi'(z)\neq 0$，

证明：$[x-\varphi(z)]\dfrac{\partial z}{\partial x}=[y-f(z)]\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

27.（本题满分 10 分）

设 $f(x)+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x^2$，求 $f(x)$.

28.（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n}(x-1)^{2n}$ 的收敛区间.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了函数的极限的知识点.

【应试指导】 $\because \lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}}=\infty$，$\lim\limits_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}}=0$. $\therefore \lim\limits_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}}$ 不存在，故选 D.

2.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了利用导数定义求极限的知识点.

【应试指导】 因 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x+1}\right]=\dfrac{1}{2}f'(1)$，因 $f'(1)=1$，故极限值为 $\dfrac{1}{2}$.

3.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数在一点处可导的知识点.

【应试指导】 选项 A 中，$y=|x|$，在 $x=0$ 处有尖点，即 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导；选项 B 中，$y=\sqrt{x}$，$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $x=0$ 处不存在，即 $y=\sqrt{x}$ 在 $x=0$ 处不可导；选项 C 中，$y=x^3$，$y'=3x^2$ 处处存在，即 $y=x^3$ 处处可导，也就在 $x=0$ 处可导；选项 D 中，$y=\ln x$，$y'=\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处不存在，$y=\ln x$ 在 $x=0$ 处不可导(事实上，在 $x=0$ 点就没定义).

4.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数的单调性的知识点.

【应试指导】 因 $y'=e^x+\dfrac{1}{1+x^2}>0$ 处处成立，于是函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内都是单调增加的，故在 $[-1,1]$ 上单调增加.

5.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了曲线的水平渐近线的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+x\sin x}{x^2-1}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sin x}{x}}{1-\dfrac{1}{x^2}}-1\right)=-1$，所以水平渐近线为 $y=-1$.

注：若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，则 $y=A$ 是水平渐近线，若 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\infty$，则 $x=c$ 是铅直渐近线.

6.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数的二阶导数的知识点.

【应试指导】 $y=\cos x$，$y'=-\sin x$，$y''=-\cos x$.

7.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数在一点处的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 因 $z=xy^2+e^{\frac{x}{y}}$，从而 $z\Big|_{(x,1)}=x+e^x$，于是 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x=0}=1+e^0=2$.

8.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了二元函数的极值的知识点.

【应试指导】 因 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$，于是 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2+6x-9$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-3y^2+6y$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x+6$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-6y+6$，

令 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x^2+2x-3=0,\\ y^2-2y=0,\end{cases}$ 得驻点 $(-3,0)$，$(-3,2)$，$(1,0)$，$(1,2)$.

对于点 $(-3,0)$，$A=-18+6=-12$，$B=0$，$C=6$，$B^2-AC=72>0$，故此点为非极值点.

对于点 $(-3,2)$，$A=-12$，$B=0$，$C=-12+6=-6$，$B^2-AC=-72<0$，故此点为极大值点.

对于点 $(1,0)$，$A=12$，$B=0$，$C=6$，$B^2-AC=-72<0$，故此点为极小值点.

对于点 $(1,2)$，$A=12$，$B=0$，$C=-6$，$B^2-AC=72>0$，故此点为非极值点.

9.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了二重积分的积分区域的表示的知识点.

【应试指导】 据右端的二次积分可得积分区域 D 为 $\begin{cases}1\leqslant y\leqslant 2,\\ y\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ 选项中显然没有这个结果，于是须将该区域 D 用另一种不等式(X－型)表示. 故 D 又可表示为 $\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2,\\ 1\leqslant y\leqslant x.\end{cases}$

10.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了级数的敛散性的知识点.

【应试指导】 当 $n>5$ 时，$2^n>n^2$，所以 $\dfrac{1}{2^n}<\dfrac{1}{n^2}$，故选项 A 收敛；选项 B 是交错级数，$\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 单调递减且 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\to 0(n\to\infty)$，故选项 B 收敛；选项 C，$\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}=\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，$\dfrac{3}{2}>1$，所以选项 C 收敛；用排除法故知选项 D 正确，其实从收敛的必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$，故选项 D 发散.

二、填空题

11.【答案】 $\dfrac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了函数的极限的知识点.

【应试指导】 令 $\dfrac{1}{x}=t$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{2}{x}}{\sin\dfrac{4}{x}}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin 2t}{\sin 4t}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

12.【答案】 $\dfrac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了对 $\infty-\infty$ 型未定式极限的知识点.

【应试指导】 这是 $\infty-\infty$ 型，应合并成一个整体，再求极限. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1-2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$.

13.【答案】 $-\dfrac{2}{\pi}$

【考情点拨】 本题考查了对由参数方程确定的函数求导的知识点.

【应试指导】 参数方程为 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$. 本题 $\varphi(t)=at\cos t$，$\psi(t)=at\sin t$，所以 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=\left(\dfrac{a\sin t+at\cos t}{a\cos t-at\sin t}\right)\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=\dfrac{a}{-a\cdot\dfrac{\pi}{2}}=-\dfrac{2}{\pi}$.

14.【答案】 $\tan\theta-\cot\theta+C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int(\tan\theta+\cot\theta)^2d\theta=\int(\tan^2\theta+2+\cot^2\theta)d\theta=\int(\sec^2\theta+\csc^2\theta)d\theta=\tan\theta-\cot\theta+C$.

15.【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了函数在一点处的连续性的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(x\sin\frac{1}{x}+a\right)=a$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}=1$，又 $f(0)=1$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续应有 $a=1$.

注:(无穷小量 × 有界量 = 无穷小量) $\lim\limits_{x\to0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，这是常用极限，应记牢.

16.【答案】 $1-\frac{\pi}{4}$

【考情点拨】 本题考查了利用换元法求定积分的知识点.

【应试指导】 令 $x=\sin t$，则 $dx=\cos t dt$. 所以 $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx\xlongequal{令x=\sin t}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\cos t}{\sin^2 t}\cos t dt=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt=-\cot t\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{\pi}{4}$.

17.【答案】 $dz=2xe^y dx+x^2e^y dy$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】 $z=x^2e^y$，$\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^y$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2e^y$，则 $dz=2xe^y dx+x^2e^y dy$.

18.【答案】 $2yf_1-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}f_2$

【考情点拨】 本题考查了复合函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial y}=f_1\cdot2y+f_2e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=2yf_1-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}f_2$.

19.【答案】 $y=e^{-3x}(C_1\cos2x+C_2\sin2x)$

【考情点拨】 本题考查了二阶线性齐次微分方程的通解的知识点.

【应试指导】 微分方程 $y''+6y'+13y=0$ 的特征方程为 $r^2+6r+13=0$，特征根为 $r=\frac{-6\pm\sqrt{36-52}}{2}=-3\pm2i$，所以微分方程的通解为 $y=e^{-3x}(C_1\cos2x+C_2\sin2x)$.

20.【答案】 4π

【考情点拨】 本题考查了二重积分的知识点.

【应试指导】 因积分区域为圆 $x^2+y^2=2^2$ 的上半圆，则 $\iint\limits_D 2dxdy=2\times\frac{1}{2}\pi\times2^2=4\pi$.

三、解答题

21. 在 $\sin(t\cdot s)+\ln(s-t)=t$ 两边对 t 求导，视 s 为 t 的函数，有

$$\cos(t\cdot s)(s+t\cdot s')+\frac{1}{s-t}\cdot(s'-1)=1,$$

而当 $t=0$ 时，$s=1$，代入上式得 $\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0}=1$.

22. ∵ $f'(x)=-xe^{-x^2}$，∴ $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递减，∴ 它的最大值是 $f(1)$，而

$$f(1)=\int_1^0 te^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-t^2}d(-t^2)$$

$$=\frac{1}{2}e^{-t^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e^{-1}-1).$$

23. 由 $\int f(x)e^{-\frac{1}{x}}dx=e^{-\frac{1}{x}}+C$，两端对 x 求导，得

$$f(x)e^{-\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2},$$

所以 $f(x)=\frac{1}{x^2}$，

故 $\int f(x)dx=\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+C$.

24. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3x\sin2x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^3x\sin x\cos x dx$

$$\xlongequal{t=\sin x}\int_0^1 2t^4 dt=\frac{2}{5}.$$

25. 用极坐标系进行计算.

$$\iint\limits_D\frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^3\frac{1}{1+r^2}rdr$$

$$=2\pi\int_0^3\frac{1}{2}\frac{1}{1+r^2}d(1+r^2)$$

$$=\pi\cdot\ln(1+r^2)\Big|_0^3$$

$$=\pi\ln10.$$

26. 在已知等式两边对 x 求导，y 视为常数，有

$$y=xf'(z)\frac{\partial z}{\partial x}+y\varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial x}+f(z),$$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y-f(z)}{xf'(z)+y\varphi'(z)}$，

同样方法可得，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x-\varphi(z)}{xf'(z)+y\varphi'(z)}$，

所以 $[x-\varphi(z)]\frac{\partial z}{\partial x}=[x-\varphi(z)]\cdot\frac{y-f(z)}{xf'(z)+y\varphi'(z)}$，

$[y-f(z)]\frac{\partial z}{\partial y}=[y-f(z)]\cdot\frac{x-\varphi(z)}{xf'(z)+y\varphi'(z)}$，

故 $[x-\varphi(z)]\frac{\partial z}{\partial x}=[y-f(z)]\frac{\partial z}{\partial y}$.

27. 由 $f(x)+2\int_0^x f(t)dt=x^2$，两边对 x 求导得

$$f'(x)+2f(x)=2x,$$

这是一个一阶线性常微分方程，解得

$$f(x)=e^{-\int2dx}\left(\int2xe^{\int2dx}dx+C\right)$$

$$=e^{-2x}\left(\int2xe^{2x}dx+C\right)$$

$$=x-\frac{1}{2}+Ce^{-2x}.$$

28. 令 $(x-1)^2=t$，则级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}t^n$.

∵ $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{2(n+1)}=1$，∴ $R=1$，

故级数在 $0\leqslant t<1$，即 $-1<x-1<1$ 上收敛，而当 $t=1$ 时，即 $x=2$ 或 $x=0$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}$，这是交错级数，由莱布尼茨判别法知级数收敛.

∴ 级数在 $[0,2]$ 上收敛.

注:本题另解如下，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2(n+1)}(x-1)^{2n+2}}{\frac{1}{2n}(x-1)^{2n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}(x-1)^2=|x-1|^2,$$

所以当 $|x-1|<1$ 时级数收敛，即 $0<x<2$ 时级数收敛，

同上知 $x=0$ 或 $x=2$ 时级数收敛，故级数的收敛区间为 $[0,2]$.

密封线内不要答题

绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学(一)

全真模拟(三)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.满分 150 分.考试时间 150 分钟.

题　号	一	二	三	总　分	统分人签字
分　数					

第Ⅰ卷(选择题,共 40 分)

得　分	评卷人

一、选择题(1～10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 若 $\int f(x)\mathrm{d}x = x\ln(x+1)+C$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 等于　【　】

A. 2　　B. -2

C. -1　　D. 1

2. 若 $f(x-1)=x^2-1$,则 $f'(x)$ 等于　【　】

A. $2x+2$　　B. $x(x+1)$

C. $x(x-1)$　　D. $2x-1$

3. 设函数 $f(x)$ 满足 $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$,且 $f(0)=0$,则 $f(x)=$　【　】

A. $\cos x+\dfrac{1}{2}\cos^2 x$　　B. $\sin x-\dfrac{1}{2}\sin^2 x$

C. $\sin^2 x-\dfrac{1}{2}\sin^4 x$　　D. $x-\dfrac{1}{2}x^2$

4. 函数 $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$ 有　【　】

A. 极大值 $f(4,1)=63$　　B. 极大值 $f(0,0)=20$

C. 极大值 $f(-4,1)=-1$　　D. 极小值 $f(-4,1)=-1$

5. 当 $x\to 0$ 时,与 x 等价的无穷小量是　【　】

A. $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$　　B. $\ln(1+x)$

C. $2(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})$　　D. $x^2(x+1)$

6. 使 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=1$ 成立的 $f(x)$ 为　【　】

A. $\dfrac{1}{x^2}$　　B. $\dfrac{1}{x}$

C. e^{-x}　　D. $\dfrac{1}{1+x^2}$

7. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\dfrac{1}{n^2}$ 是　【　】

A. 绝对收敛　　B. 条件收敛

C. 发散　　D. 无法确定敛散性

8. 方程 $z=x^2+y^2$ 表示的曲面是　【　】

A. 椭球面　　B. 旋转抛物面

C. 球面　　D. 圆锥面

9. 已知 $f(xy,x-y)=x^2+y^2$,则 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 等于　【　】

A. 2　　B. $2x$

C. $2y$　　D. $2x+2y$

10. 微分方程 $y''-7y'+12y=0$ 的通解为　【　】

A. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-4x}$　　B. $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{4x}$

C. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}$　　D. $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-4x}$

第Ⅱ卷(非选择题,共 110 分)

得　分	评卷人

二、填空题(11～20 小题,每小题 4 分,共 40 分)

11. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{x+1}=$__________.

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5^n\sin\dfrac{x}{5^n}\right)=$__________.

13. 若 $y=\left(\dfrac{1}{x}\right)^x$,则 $y'=$__________.

14. 由 $\int f(x)\mathrm{d}x=\arctan\dfrac{1}{x}+C$,求 $f(x)$ 的导数等于__________.

15. 函数 $f(x)=x\sqrt{3-x}$ 在$[0,3]$上满足罗尔定理,则 $\xi=$__________.

16. $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=$__________.

17. $\int\sec^2 5x\mathrm{d}x=$__________.

18. 已知 $z=(1+xy)^y$,则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=$__________.

19. 若将 $I=\int_1^e\mathrm{d}x\int_0^{\ln x}f(x,y)\mathrm{d}y$ 改变积分顺序,则 $I=$__________.

20. 方程 $y'-e^{x-y}=0$ 的通解为__________.

得 分	评卷人

三、解答题(21～28 题,共 70 分.解答应写出推理、演算步骤)

21.(本题满分 8 分)

若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^x}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,求 a.

22.(本题满分 8 分)

函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y=\sin(x+y)$ 确定,求 dy.

23.(本题满分 8 分)

求 $\int x^2 e^x dx$.

24.(本题满分 8 分)

求 $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$.

25.(本题满分 8 分)

已知 $z=y^{\ln xy}$,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

26.(本题满分 10 分)

计算 $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$,其中 D 为 $x^2+y^2\leqslant 1$,且 $x\geqslant 0$,$y\geqslant 0$ 所围区域.

27.(本题满分 10 分)

求 $\begin{cases}x=\int_0^t \dfrac{5au}{(1+u^2)^2}du,\\ y=\dfrac{2at^2}{1+t^2}\end{cases}$ 在 $t=1$ 处的切线方程.

28.(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}x^{2n-1}$ 的收敛区间.

密 封 线 内 不 要 答 题

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了一元函数的导数及其极限的知识点.

【应试指导】 因$\int f(x)\mathrm{d}x = x\ln(x+1)+C$,所以 $f(x)=[x\ln(x+1)+C]'=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}$,故$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x+1}+1=2.$

2.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了一元函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 因 $f(x-1)=x^2-1$,故 $f(x)=(x+1)^2-1=x^2+2x$,则 $f'(x)=2x+2$.

3.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了已知导函数求原函数的知识点.

【应试指导】 由 $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$,知 $f'(\sin^2 x)=1-\sin^2 x$. 令 $u=\sin^2 x$,故 $f'(u)=1-u$. 所以 $f(u)=u-\frac{1}{2}u^2+C$,由 $f(0)=0$,得 $C=0$. 所以 $f(x)=x-\frac{1}{2}x^2$.

4.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了函数的极值的知识点.

【应试指导】 因 $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$,于是$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-y+9$,$\frac{\partial z}{\partial y}=-x+2y-6$. 令$\frac{\partial z}{\partial x}=0$,$\frac{\partial z}{\partial y}=0$,得驻点$(-4,1)$. 又因$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2$,$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-1$,$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$. 故对于点$(-4,1)$,$A=2$,$B=-1$,$C=2$,$B^2-AC=-3<0$,且 $A>0$,因此$z=f(x,y)$ 在点$(-4,1)$ 处取得极小值,且极小值为 $f(-4,1)=-1$.

5.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了等价无穷小量的知识点.

【应试指导】 对于选项 A,$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\sqrt{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=\infty$,故$\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$是在 $x\to 0$ 时的比 x 低阶的无穷小;对于选项 B,$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=1$,故 $\ln(1+x)$ 是 $x\to 0$ 时与 x 等价的无穷小;对于选项 C,$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=2$,故 $2(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})$ 是 $x\to 0$ 时与 x 同阶非等价的无穷小;对于选项 D,$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2(x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x(x+1)=0$,故 $x^2(x+1)$ 是 $x\to 0$ 时的比 x 高阶的无穷小.

6.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了反常积分的敛散性的知识点.

【应试指导】 对于选项 A,$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty}=1$,故此积分收敛,且收敛于 1;对于选项 B,$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_1^{+\infty}$ 不存在;对于选项 C,$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\Big|_1^{+\infty}=\mathrm{e}^{-1}$,故此积分收敛,但收敛于 e^{-1};对于选项 D,$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_1^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$,故此积分收敛,但收敛于$\frac{\pi}{4}$,故选 A.

7.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了级数的绝对收敛的知识点.

【应试指导】 因$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}=1$,故原级数等价于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$,所以级数绝对收敛.

8.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了二次曲面(旋转抛物面)的知识点.

【应试指导】 旋转抛物面的方程为 $z=x^2+y^2$.

9.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了复合函数的偏导数的知识点.

【应试指导】 因 $f(xy,x-y)=x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$,故 $f(x,y)=y^2+2x$,从而$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2$.

10.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了二阶线性齐次微分方程的通解的知识点.

【应试指导】 因方程 $y''-7y'+12y=0$ 的特征方程为 $r^2-7r+12=0$,于是有特征根 $r_1=3$,$r_2=4$,故微分方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{4x}$.

二、填空题

11.【答案】 e^{-2}

【考情点拨】 本题考查了函数的极限的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{(-\frac{x}{2})\cdot(-\frac{2}{x})\cdot(x+1)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}[-\frac{2(x+1)}{x}]}=\mathrm{e}^{-2}$.

12.【答案】 x

【考情点拨】 本题考查了利用$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 求极限的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5^n\cdot\sin\frac{x}{5^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x\sin\frac{x}{5^n}}{\frac{x}{5^n}}=x$.

13.【答案】 $\left(\frac{1}{x}\right)^x\left(\ln\frac{1}{x}-1\right)$

【考情点拨】 本题考查了一元函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 由 $y=\left(\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}^{\ln(\frac{1}{x})^x}=\mathrm{e}^{x\ln\frac{1}{x}}$,所以 $y'=\mathrm{e}^{x\ln\frac{1}{x}}\cdot\left[\ln\frac{1}{x}+x\cdot\frac{1}{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]=\mathrm{e}^{x\ln\frac{1}{x}}\left(\ln\frac{1}{x}-1\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^x\left(\ln\frac{1}{x}-1\right)$.

注:用对数求导法可解之如下:

$\ln y=x\cdot\ln\frac{1}{x}$,两边对 x 求导得$\frac{1}{y}\cdot y'=\ln\frac{1}{x}+x\cdot\frac{1}{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\ln\frac{1}{x}-1$,所以 $y'=\left(\frac{1}{x}\right)^x\left(\ln\frac{1}{x}-1\right)$.

14.【答案】 $\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

【考情点拨】 本题考查了一元函数的导数的知识点.

【应试指导】 由$\int f(x)\mathrm{d}x=\arctan\frac{1}{x}+C$两边对$x$求导，得$f(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{x^2+1}$，所以

$f'(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$.

15.【答案】 2

【考情点拨】 本题考查了罗尔定理的知识点.

【应试指导】 由$f(x)=x\sqrt{3-x}$，得$f(0)=f(3)=0$.又因$f'(x)=\sqrt{3-x}+x\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}=\frac{2(3-x)-x}{2\sqrt{3-x}}=$

$\frac{3(2-x)}{2\sqrt{3-x}}$，故$f'(\xi)=0$，所以$\xi=2$.

16.【答案】 $\frac{1}{3}$

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}$.

17.【答案】 $\frac{1}{5}\tan 5x+C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int\sec^2 5x\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int\sec^2 5x\mathrm{d}(5x)=\frac{1}{5}\tan 5x+C$.

18.【答案】 $1+2\ln 2$

【考情点拨】 本题考查了二元函数在一点处的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 由$z=(1+xy)^y$，两边取对数得$\ln z=y\ln(1+xy)$，则$\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\ln(1+xy)+y\cdot\frac{x}{1+xy}$.所以$\frac{\partial z}{\partial y}=$

$(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right]$.因此$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,1)}=2\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)=1+2\ln 2$.

注：将$x=1$代入$z=(1+xy)^y$，得$z\Big|_{(1,y)}=\mathrm{e}^{y\ln(1+y)}$，则$\frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{y\ln(1+y)}\left[\ln(1+y)+\frac{y}{1+y}\right]$.所以$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,1)}=$

$2\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)=1+2\ln 2$.

19.【答案】 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}}f(x,y)\mathrm{d}x$

【考情点拨】 本题考查了改变积分顺序的知识点.

【应试指导】 因积分区域$D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant\mathrm{e},0\leqslant y\leqslant\ln x\}=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1,\mathrm{e}^y\leqslant x\leqslant\mathrm{e}\}$，所以$I=$

$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

注：画出草图就能清楚地看出积分区域的特征.

20.【答案】 $\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^x+C$

【考情点拨】 本题考查了可分离变量微分方程的通解的知识点.

【应试指导】 $y'-\mathrm{e}^{x-y}=0$，可改写为$\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$，两边积分得$\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^x+C$.

三、解答题

21. 由$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\mathrm{e}^x}{1}=-1$，

又因$f(0)=a$，所以当$a=-1$时，$f(x)$在$x=0$连续.

22. 将$\mathrm{e}^y=\sin(x+y)$两边对x求导，有

$\mathrm{e}^y\cdot y'=\cos(x+y)(1+y')$，

所以$y'=\frac{\cos(x+y)}{\mathrm{e}^y-\cos(x+y)}$，

故$\mathrm{d}y=\frac{\cos(x+y)}{\mathrm{e}^y-\cos(x+y)}\mathrm{d}x$.

23. $\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}\mathrm{e}^x=x^2\mathrm{e}^x-\int 2x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

$=x^2\mathrm{e}^x-2\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^x$

$=x^2\mathrm{e}^x-2\left(x\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\right)$

$=x^2\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x+C$.

24. 令$\sqrt{x}=t$，则

原式$=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{\arcsin t}{\sqrt{t^2(1-t^2)}}\cdot 2t\mathrm{d}t=2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$

$=2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\arcsin t\mathrm{d}(\arcsin t)=(\arcsin t)^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2-\left(\frac{\pi}{6}\right)^2=\frac{5\pi^2}{144}$.

25. 由$z=y^{\ln xy}$，

$\frac{\partial z}{\partial x}=y^{\ln xy}\cdot\ln y\cdot\frac{1}{xy}\cdot y=\frac{1}{x}\ln y\cdot y^{\ln xy}$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{x}\left[\frac{1}{y}\cdot y^{\ln xy}+\ln y\cdot(\mathrm{e}^{\ln y\cdot\ln xy})'\right]$

$=\frac{1}{x}\left[\frac{1}{y}y^{\ln xy}+\ln y\cdot\mathrm{e}^{\ln y\cdot\ln xy}\left(\frac{1}{y}\ln xy+\frac{x}{xy}\ln y\right)\right]$

$=\frac{1}{x}\left[\frac{1}{y}y^{\ln xy}+\ln y\cdot y^{\ln xy}\left(\frac{1}{y}\ln xy+\frac{1}{y}\ln y\right)\right]$

$=\frac{1}{xy}\cdot y^{\ln xy}(1+\ln y\cdot\ln xy^2)$.

26. 用极坐标解(积分区域和被积函数均适宜用极坐标处理).

$\iint\limits_D\mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\mathrm{e}^{r^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{e}^{r^2}r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}(\mathrm{e}-1)$.

27. 由$\mathrm{d}y=\frac{4at(1+t^2)-2t\cdot 2at^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t=\frac{4at}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$，

$\mathrm{d}x=\frac{5at}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$，

所以$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{4}{5}$，而$t=1$时，$y=a$，$x=\int_0^1\frac{5au}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u=\frac{5}{4}a$，

故切线方程为$y-a=\frac{4}{5}\left(x-\frac{5}{4}a\right)$，即$y=\frac{4}{5}x$.

注：$\int_0^1\frac{5au}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u=\int_0^1\frac{5a}{2(1+u^2)^2}\mathrm{d}(1+u^2)$

$=\frac{5a}{2}\left[-\frac{1}{(1+u^2)}\right]\Bigg|_0^1$

$=\frac{5a}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{5a}{4}$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2^{n+1}}x^{2(n+1)-1}}{\frac{1}{2^n}x^{2n-1}}\right|=\frac{1}{2}x^2$.

当$\frac{1}{2}x^2<1$，即$x^2<2$时，所给级数收敛，因此，收敛区间为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学(一)

全真模拟(四)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.满分 150 分.考试时间 150 分钟.

题　号	一	二	三	总　分	统分人签字
分　数					

第Ⅰ卷(选择题,共 40 分)

得　分	评卷人

一、选择题(1～10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}=$　【　】

A. 1　　B. 0

C. 2　　D. $\dfrac{1}{2}$

2. 设函数 $y=x^2+1$,则$\dfrac{dy}{dx}=$　【　】

A. $\dfrac{1}{3}x^3$　　B. x^2

C. $2x$　　D. $\dfrac{1}{2}x$

3. 函数 $y=e^x+e^{-x}$的单调增加区间是　【　】

A. $(-\infty,+\infty)$　　B. $(-\infty,0]$

C. $(-1,1)$　　D. $[0,+\infty)$

4. 设 $\int f(x)dx=x^2+C$,则$\int xf(1-x^2)dx=$　【　】

A. $-2(1-x^2)^2+C$　　B. $2(1-x^2)^2+C$

C. $-\dfrac{1}{2}(1-x^2)^2+C$　　D. $\dfrac{1}{2}(1-x^2)^2+C$

5. 过点(0,2,4)且平行于平面 $x+2z=1$,$y-3z=2$ 的直线方程为　【　】

A. $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-4}{-3}$　　B. $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-4}{-3}$

C. $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{1}$　　D. $-2x+3(y-2)+z-4=0$

6. 设 $z=\ln(x^3+y^3)$,则 $dz\Big|_{(1,1)}=$　【　】

A. $dx+dy$　　B. $\dfrac{1}{3}(dx+dy)$

C. $\dfrac{3}{2}(dx+dy)$　　D. $2(dx+dy)$

7. 比较 $I_1=\iint\limits_D(x+y)^2d\sigma$ 与 $I_2=\iint\limits_D(x+y)^3d\sigma$ 的大小,其中 $D:(x-2)^2+(y-1)^2\leqslant1$,则　【　】

A. $I_1=I_2$　　B. $I_1>I_2$

C. $I_1<I_2$　　D. 无法比较

8. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,则　【　】

A. 可能有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$　　B. 一定有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq0$

C. 一定有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$　　D. 一定有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

9. 微分方程 $y'=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$的通解为　【　】

A. $\dfrac{1}{\sin\frac{y}{x}}=Cx$　　B. $\sin\dfrac{y}{x}=x+C$

C. $\sin\dfrac{y}{x}=Cx$　　D. $\sin\dfrac{x}{y}=Cx$

10. 设方程 $y''-2y'-3y=f(x)$有特解 y^*,则它的通解为　【　】

A. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}+y^*$　　B. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$

C. $y=C_1xe^{-x}+C_2e^{3x}+y^*$　　D. $y=C_1e^{x}+C_2e^{-3x}+y^*$

第Ⅱ卷(非选择题,共 110 分)

得　分	评卷人

二、填空题(11～20 小题,每小题 4 分,共 40 分)

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$,则 $a=$________.

12. 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x(e^{t^2}-1)dt}{x^2}, & x\neq0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$________.

13. 设 $y=x^2e^x$,则$y^{(10)}\Big|_{x=0}=$________.

14. 设函数 $f(x)$有连续的二阶导数且 $f(0)=0$,$f'(0)=1$,$f''(0)=-2$,则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=$________.

15. 求 $\int\dfrac{1}{e^x(1+e^{2x})}dx=$________.

16. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & -2\leqslant x<0,\\ x+1, & 0\leqslant x\leqslant1,\\ 2x, & 1<x\leqslant2,\end{cases}$ 则 $\int_{-2}^{2}f(x)dx=$________.

17. 设 $z=\sqrt{x^2+y^2}$,则$\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2z}{\partial y^2}=$________.

18. 设 $I=\int_0^a dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dx$,将此积分化为极坐标系下的积分,此时 $I=$________.

19. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径为______.

20. 方程 $\cos x \sin y \mathrm{d}x + \sin x \cos y \mathrm{d}y = 0$ 的通解为______.

得　分	评卷人

三、解答题(21～28 题，共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21.（本题满分 8 分）

确定函数 $f(x,y)=3axy-x^3-y^3\ (a>0)$ 的极值点.

22.（本题满分 8 分）

求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}\int_1^x \dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

23.（本题满分 8 分）

讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$ 的敛散性.

24.（本题满分 8 分）

求 $\int \dfrac{x\cos x}{\sin^3 x}\mathrm{d}x$.

25.（本题满分 8 分）

证明：$\mathrm{e}^x > 1+x\ (x>0)$.

26.（本题满分 10 分）

设 $x>0$ 时 $f(x)$ 可导，且满足 $f(x)=1+\dfrac{1}{x}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$，求 $f(x)$.

27.（本题满分 10 分）

求方程 $y''-2y'+5y=\mathrm{e}^x$ 的通解.

28.（本题满分 10 分）

设 $f(x)=\int_0^{a-x}\mathrm{e}^{y(2a-y)}\mathrm{d}y$，求 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$（提示：利用二重积分交换顺序去计算）.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了利用$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$求极限的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}(x+1)=2.$

2.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了一元函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 $y=x^2+1,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x.$

3.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了函数的单调区间的知识点.

【应试指导】 $y=e^x+e^{-x}$，则 $y'=e^x-e^{-x}$，当$x>0$时，$y'>0$，所以 y 在区间$[0,+\infty)$上单调递增.

4.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了换元积分法的知识点.

【应试指导】 $\int xf(1-x^2)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int f(1-x^2)\mathrm{d}(1-x^2)=-\frac{1}{2}(1-x^2)^2+C.$

5.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了直线方程的知识点.

【应试指导】 两平面的交线方向$\boldsymbol{S}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&2\\0&1&-3\end{vmatrix}=\{-2,3,1\}$，即为所求直线的方向，所以所求直线方程为$\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}$.

6.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3x^2}{x^3+y^3},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3y^2}{x^3+y^3}$，$\because \mathrm{d}z=\frac{3x^2\mathrm{d}x+3y^2\mathrm{d}y}{x^3+y^3}$，$\therefore \mathrm{d}z\Big|_{(1,1)}=\frac{3}{2}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y).$

注：另解如下，由一阶微分形式不变性得 $\mathrm{d}z=\frac{1}{x^3+y^3}(3x^2\mathrm{d}x+3y^2\mathrm{d}y)$，所以 $\mathrm{d}z\Big|_{(1,1)}=\frac{3}{2}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y).$

7.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了二重积分的性质的知识点.

【应试指导】 因积分区域 D 是以点$(2,1)$为圆心的一单位圆，且它位于直线 $x+y=1$ 的上方，即在 D 内恒有 $x+y>1$，所以$(x+y)^2<(x+y)^3$. 所以有 $I_1<I_2$.

8.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了级数收敛的必要性的知识点.

【应试指导】 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散，可能有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，故 A 正确. 由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散可见 B 不成立，C 不成立. 由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$发散知 D 不成立.

9.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了一阶微分方程的通解的知识点.

【应试指导】 设$\frac{y}{x}=u,y=xu,y'=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，代入有$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\tan u$，所以$\frac{\mathrm{d}u}{\tan u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$，$\ln|\sin u|=\ln|x|+\ln C,\sin u=Cx$，

原方程的通解为 $\sin\frac{y}{x}=Cx$.

10.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了二阶常系数微分方程的通解的知识点.

【应试指导】 考虑对应的齐次方程 $y''-2y'-3y=0$ 的通解. 特征方程为 $r^2-2r-3=0$，所以 $r_1=-1,r_2=3$，所以 $y''-2y'-3y=0$ 的通解为 $\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$，所以原方程的通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}+y^*$.

二、填空题

11.【答案】 $\ln 2$

【考情点拨】 本题考查了$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$的应用的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{\frac{3ax}{x-a}}=e^{3a}=8$，所以 $a=\ln 2$.

12.【答案】 0

【考情点拨】 本题考查了函数在一点处的连续性的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x(e^{t^2}-1)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\cdot 2x}{2}=0$，又 $f(0)=a$，则若 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，应有$a=0$.

13.【答案】 90

【考情点拨】 本题考查了莱布尼茨公式的知识点.

【应试指导】 由莱布尼茨公式得，$y^{(10)}=x^2(e^x)^{(10)}+10(x^2)'\cdot(e^x)^{(9)}+45(x^2)''(e^x)^{(8)}=x^2e^x+20xe^x+90e^x$，所以 $y^{(10)}\Big|_{x=0}=90$.

14.【答案】 -1

【考情点拨】 本题考查了洛必达法则的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{-2}{2}=-1.$

注：$f(x)$ 连续，且 $f(0)=0$，则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，因此当 $x\to 0$ 时，$\frac{f(x)-x}{x^2}$是“$\frac{0}{0}$”型待定式，故可用洛必达法则，同样可说明$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-1}{2x}$仍为“$\frac{0}{0}$”且可继续使用洛必达法则.

15.【答案】 $-\frac{1}{e^x}-\arctan e^x+C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int\frac{1}{e^x(1+e^{2x})}\mathrm{d}x=\int\frac{e^x}{e^{2x}(1+e^{2x})}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{e^{2x}(1+e^{2x})}\mathrm{d}e^x\xlongequal{e^x=t}\int\frac{1}{t^2(1+t^2)}\mathrm{d}t=\int\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t-\int\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=-\frac{1}{t}-\arctan t+C=-\frac{1}{e^x}-\arctan e^x+C.$

16.【答案】 $\frac{13}{2}$

【考情点拨】 本题考查了分段函数的定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(x+1)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}2x\mathrm{d}x=2+\frac{(x+1)^2}{2}\Big|_{0}^{1}+x^2\Big|_{1}^{2}=2+2-\frac{1}{2}+4-1=\frac{13}{2}$.

注：分段函数的积分必须分段进行.

17.【答案】 $\frac{1}{z}$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的二阶偏导数的知识点.

【应试指导】 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot x}{x^2+y^2}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$，类似，由对称性知 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. 故 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{z}$.

18.【答案】 $\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\mathrm{d}r$

【考情点拨】 本题考查了利用极坐标求积分的知识点.

【应试指导】 因积分区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant a,0\leqslant x\leqslant\sqrt{a^2-y^2}\}$，即 D 是圆 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 在第一象限部分，故 $I=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\mathrm{d}r$.

19.【答案】 R

【考情点拨】 本题考查了幂级数的收敛半径的知识点.

【应试指导】 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R，由幂级数的逐项微分定理知 $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 的收敛半径也是 R.

20.【答案】 $\sin x\cdot\sin y=C$

【考情点拨】 本题考查了可分离变量微分方程的通解的知识点.

【应试指导】 由 $\cos x\sin y\mathrm{d}x+\sin x\cos y\mathrm{d}y=0$，知 $\sin y\mathrm{d}\sin x+\sin x\mathrm{d}\sin y=0$，即 $\mathrm{d}(\sin x\cdot\sin y)=0$，两边积分得 $\sin x\cdot\sin y=C$，这就是方程的通解.

三、解答题

21. $\frac{\partial f}{\partial x}=3ay-3x^2$，$\frac{\partial f}{\partial y}=3ax-3y^2$，令 $\frac{\partial f}{\partial x}=0$，$\frac{\partial f}{\partial y}=0$，联立有

$\begin{cases}ax-y^2=0,\\ ay-x^2=0,\end{cases}$ 解得 $x=y=a$ 或 $x=y=0$，

由 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-6x$，$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-6y$，$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=3a$，

知 $\Delta=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=9a^2-36xy$.

在 $(0,0)$ 点，$\Delta>0$，所以 $(0,0)$ 不是极值点.

在 (a,a) 点，$\Delta<0$，且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-6a<0(a>0)$，故 (a,a) 是极大值点.

22. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\int_1^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin x}{x}=\sin1$.

23. 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\mathrm{e}^{-1}$，所以级数收敛.

24. $\int\frac{x\cos x}{\sin^3x}\mathrm{d}x=\int\frac{x}{\sin^3x}\mathrm{d}\sin x$

$=-\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}(\sin x)^{-2}$

$=-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2x}-\int\frac{1}{\sin^2x}\mathrm{d}x\right)$

$=-\frac{1}{2}\frac{x}{\sin^2x}-\frac{1}{2}\cot x+C$.

25. 对 $F(x)=\mathrm{e}^x$ 在 $[0,x]$ 上使用拉格朗日中值定理得

$F(x)-F(0)=F'(\xi)x,0<\xi<x$，

因 $F'(\xi)=\mathrm{e}^{\xi}>1$，即 $\frac{F(x)-F(0)}{x}>1$，

故 $\mathrm{e}^x>x+1(x>0)$.

注：本题也可用单调性证明

记 $G(x)=\mathrm{e}^x-1-x$，则 $G'(x)=\mathrm{e}^x-1$.

由 $x>0$ 知 $G'(x)>0$，所以 $G(x)$ 单调增加，由 $G(0)=0$，

知 $G(x)>G(0)=0$，即 $\mathrm{e}^x-1-x>0$，

所以 $\mathrm{e}^x>1+x$.

26. 因 $f(x)=1+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$ 可导，在该式两边乘 x 得

$xf(x)=x+\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$，

两边对 x 求导得 $f(x)+xf'(x)=1+f(x)$，

所以 $f'(x)=\frac{1}{x}$，

则 $f(x)=\ln x+C$，

再由 $x=1$ 时，$f(1)=1$，

得 $C=1$，故 $f(x)=\ln x+1$.

27. $y''-2y'+5y=0$ 的特征方程为 $r^2-2r+5=0$，

故特征根为 $r=1\pm2i$，

非齐次项的特解可设为 $y=A\mathrm{e}^x$，代入原方程得 $A=\frac{1}{4}$，

所以方程的通解为

$y=\mathrm{e}^x(C_1\cos2x+C_2\sin2x)+\frac{1}{4}\mathrm{e}^x$.

28. 将 $f(x)$ 代入有

$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{e}^{y(2a-y)}\mathrm{d}y$

$=\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^{a-y}\mathrm{e}^{y(2a-y)}\mathrm{d}x$

$=\int_0^a(a-y)\mathrm{e}^{y(2a-y)}\mathrm{d}y$

$=\int_0^a(a-y)\mathrm{e}^{a^2-(a-y)^2}\mathrm{d}y$

$=-\frac{1}{2}\int_0^a\mathrm{e}^{a^2}\mathrm{e}^{-(a-y)^2}\mathrm{d}(a-y)^2$

$=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{a^2}\left[-\mathrm{e}^{-(a-y)^2}\right]\Big|_0^a$

$=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{a^2}(\mathrm{e}^{-a^2}-\mathrm{e}^0)$

$=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{a^2}-1)$.

密封线内不要答题

密封线内不要答题

绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学(一)

全真模拟(五)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.满分150分.考试时间150分钟.

题　号	一	二	三	总　分	统分人签字
分　数					

第Ⅰ卷(选择题,共40分)

得　分	评卷人

一、选择题(1～10小题,每小题4分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处 【　】

A. 连续且可导　　B. 连续且不可导

C. 不连续　　D. 不仅可导,导数也连续

2. 曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ 【　】

A. 没有渐近线　　B. 仅有水平渐近线

C. 仅有铅直渐近线　　D. 既有水平渐近线,又有铅直渐近线

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)+a}{x}=6$,则 a 的值为 【　】

A. -1　　B. 1

C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. 2

4. 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin t^2\,dt$, $g(x)=x^3+x^4$,当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 【　】

A. 等价无穷小　　B. $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶无穷小

C. $f(x)$ 是比 $g(x)$ 低阶无穷小　　D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶但非等价无穷小

5. 已知 $\int f(x^2)dx=e^{\frac{x}{2}}+C$,则 $f(x)=$ 【　】

A. $\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$　　B. $\dfrac{1}{2}e^{\frac{\sqrt{x}}{2}}$

C. $e^{\frac{x}{2}}$　　D. $e^{\frac{\sqrt{x}}{2}}$

6. 曲线 $y=e^x$ 与其过原点的切线及 y 轴所围面积为 【　】

A. $\int_0^1(e^x-ex)dx$　　B. $\int_1^e(\ln y-y\ln y)dy$

C. $\int_0^e(e^x-xe^x)dx$　　D. $\int_0^1(\ln y-y\ln y)dy$

7. 设函数 $f(x)=\cos x$,则 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=$ 【　】

A. 1　　B. 0

C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. -1

8. 设 $y=e^x\sin x$,则 $y'''=$ 【　】

A. $\cos x\cdot e^x$　　B. $\sin x\cdot e^x$

C. $2e^x(\cos x-\sin x)$　　D. $2e^x(\sin x-\cos x)$

9. 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛,则此级数在 $x=2$ 处 【　】

A. 发散　　B. 条件收敛

C. 绝对收敛　　D. 不能确定

10. $f(x)=\int_0^{2x}f\left(\dfrac{t}{2}\right)dt+\ln 2$,则 $f(x)=$ 【　】

A. $e^x\ln 2$　　B. $e^{2x}\ln 2$

C. $e^x+\ln 2$　　D. $e^{2x}+\ln 2$

第Ⅱ卷(非选择题,共110分)

得　分	评卷人

二、填空题(11～20小题,每小题4分,共40分)

11. 函数 $F(x)=\int_1^x\left(2-\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)dt\,(x>0)$ 的单调递减区间是________.

12. 设 $f''(x)$ 连续, $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+yf(x+y)$,则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

13. 设 $I=\iint\limits_D x^2y\,dxdy$, D 是圆域 $x^2+y^2\leqslant a^2$,则 $I=$________.

14. 设 $f(x)=ax^3-6ax^2+b$ 在区间$[-1,2]$的最大值为2,最小值为-29,又知 $a>0$,则 a,b 的取值为________.

15. 设曲线 $y=\dfrac{x^2+x-2}{1-x^2}$,则该曲线的铅直渐近线为________.

16. 当 p________时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{1+n^p}$ 收敛.

17. 求 $\int\dfrac{1}{x^2+2x+5}dx=$________.

18. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^2+1}x^n$ 的收敛半径 $R=$________.

19. 方程 $y''-2y'+5y=e^x\sin 2x$ 的特解可设为 $y^*=$________.

20. $\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{(1+x^2)^2}dx=$________.

得　分	评卷人

三、解答题(21～28 题,共 70 分.解答应写出推理、演算步骤)

21.(本题满分 8 分)

设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{A(1-\cos 2x)}{x^2}, & x<0, \\ 4, & x=0, \\ \dfrac{B\sin x+\int_0^x \cos t^2 \, dt}{x}, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 连续,试确定 A,B.

22.(本题满分 8 分)

已知由 $\int_0^y e^{t^2} dt=\int_0^{x^2}\cos t dt+\cos y^2$ 确定 y 是 x 的函数,求 dy.

23.(本题满分 8 分)

求 $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

24.(本题满分 8 分)

设函数 $z(x,y)$ 由方程 $F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 所确定,

证明:$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-xy$.

25.(本题满分 8 分)

求方程 $(y-x^2y)y'=x$ 的通解.

26.(本题满分 10 分)

已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(a)=f(b)$,在 (a,b) 内 $f''(x)$ 存在,连接 $A(a,f(a))$, $B(b,f(b))$ 两点的直线交曲线 $y=f(x)$ 于 $C(c,f(c))$ 且 $a<c<b$,试证在 (a,b) 内至少有一点 ξ 使得 $f''(\xi)=0$.

27.(本题满分 10 分)

设 $\int_1^{+\infty}\left(\dfrac{x^2+bx+a}{x^2+ax}-1\right)dx=1$,求常数 a,b.

28.(本题满分 10 分)

已知两直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$ 和 $L_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$. 求过 L_1 且平行于 L_2 的平面的方程.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数在一点处的连续性和可导性的知识点.

【应试指导】 因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$,所以函数在 $x=0$ 处连续;又因 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{x}$ 不存在,所以函数在 $x=0$ 处不可导.

2.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了曲线的渐近线的知识点.

【应试指导】 因 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=1$,所以 $y=1$ 为水平渐近线. 又因 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=\infty$,所以 $x=0$ 为铅直渐近线.

3.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了洛必达法则的知识点.

【应试指导】 因为 $x\to0$ 时分母极限为 0,只有分子极限也为 0,才有可能使分式极限为 6,故 $\lim\limits_{x\to0}[(1+x)(1+2x)\cdot(1+3x)+a]=1+a=0$,解得 $a=-1$,所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6x+11x^2+6x^3}{x}=6$.

4.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了两个无穷小量阶的比较的知识点.

【应试指导】 由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sin t^2\,dt}{x^3+x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\sin^2x)\cdot\cos x}{3x^2+4x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x}{3x^2+4x^3}$(等价无穷小代换)$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{3x^2+4x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{3+4x}=\dfrac{1}{3}$. 故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同价但非等价无穷小.

5.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了已知积分函数求原函数的知识点.

【应试指导】 因为 $f(x^2)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$,所以 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{\sqrt{x}}{2}}$.

6.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了曲线围成的面积的知识点.

【应试指导】 设(x_0,y_0)为切点,则切线方程为 $y=e^{x_0}x$,联立 $\begin{cases}y_0=e^{x_0}x_0,\\ y_0=e^{x_0},\end{cases}$ 得 $x_0=1,y_0=e$,所以切线方程为 $y=ex$. 故所求面积为 $\int_0^1(e^x-ex)dx$.

7.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了一元函数在一点处的一阶导数的知识点.

【应试指导】 $f(x)=\cos x,f'(x)=-\sin x,f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{2}=-1$.

8.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了莱布尼茨公式的知识点.

【应试指导】 由莱布尼茨公式,得 $(e^x\sin x)'''=(e^x)'''\sin x+3(e^x)''(\sin x)'+3(e^x)'(\sin x)''+e^x(\sin x)'''=e^x\sin x+3e^x\cos x+3e^x(-\sin x)+e^x(-\cos x)=2e^x(\cos x-\sin x)$.

9.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了级数的绝对收敛的知识点.

【应试指导】 由题意知,级数收敛半径 $R\geqslant2$,则 $x=2$ 在收敛域内部,故其为绝对收敛.

10.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了一阶线性齐次方程的知识点.

【应试指导】 因 $f'(x)=f(x)\cdot2$,即 $y'=2y$,此为常系数一阶线性齐次方程,其特征根为 $r=2$,所以其通解为 $y=Ce^{2x}$,又当 $x=0$ 时,$f(0)=\ln2$,所以 $C=\ln2$,故 $f(x)=e^{2x}\ln2$.

注:方程 $y'=2y$ 求解时也可用变量分离.

二、填空题

11.【答案】 $0<x<\dfrac{1}{4}$

【考情点拨】 本题考查了函数的单调区间的知识点.

【应试指导】 由 $F(x)=\int_1^x\left(2-\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)dt\,(x>0)$,则 $F'(x)=2-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. 令 $F'(x)=0$,得 $\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}$,即 $x=\dfrac{1}{4}$,故当 $0<x<\dfrac{1}{4}$ 时,$F'(x)<0$,$F(x)$ 单调递减.

12.【答案】 $yf''(xy)+f'(x+y)+yf''(x+y)$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的混合偏导数的知识点.

【应试指导】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{1}{x^2}f(xy)+\dfrac{1}{x}f'(xy)\cdot y+yf'(x+y)$,$\dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{1}{x^2}f'(xy)\cdot x+\dfrac{1}{x}f'(xy)+\dfrac{y}{x}f''(xy)\cdot x+f'(x+y)+yf''(x+y)=yf''(xy)+f'(x+y)+yf''(x+y)$.

13.【答案】 0

【考情点拨】 本题考查了利用极坐标求二重积分的知识点.

【应试指导】 用极坐标计算. $I=\iint\limits_D x^2y\,dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^3\cos^2\theta\sin\theta\cdot r\,dr=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta\int_0^a r^4\,dr=-\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\cos\theta\int_0^a r^4\,dr=-\left(\dfrac{1}{3}\cos^3\theta\Big|_0^{2\pi}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{5}r^5\Big|_0^a\right)=0$.

注:本题也可用对称性求出. 由于 D 为 $x^2+y^2\leqslant a$ 关于 x 轴对称,且 $f(x,y)=x^2y$ 关于 y 为奇函数,则 $\iint\limits_D x^2y\,dxdy=0$.

14.【答案】 $\dfrac{31}{16}$,2

【考情点拨】 本题考查了函数的最大、最小值的知识点.

【应试指导】 $f'(x)=3ax^2-12ax$,$f'(x)=0$,则 $x=0$ 或 $x=4$,而 $x=4$ 不在$[-1,2]$中,故舍去. $f''(x)=6ax-12a$,$f''(0)=-12a$,因为 $a>0$,所以 $f''(0)<0$,所以 $x=0$ 是极值点. 又因 $f(-1)=-a-6a+b=b-7a$,$f(0)=b$,$f(2)=8a-24a+b=b-16a$,因为 $a>0$,故当 $x=0$ 时,$f(x)$ 最大,即 $b=2$;当 $x=2$ 时,$f(x)$ 最小. 所以 $b-16a=-29$,即 $16a=2+29=31$,故 $a=\dfrac{31}{16}$.

15.【答案】 $x=-1$

【考情点拨】 本题考查了曲线的铅直渐近线的知识点.

【应试指导】 由 $y=\dfrac{x^2+x-2}{1-x^2}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x)}$,则 $\lim\limits_{x\to-1}y=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+2}{1+x}$ 不存在,$\lim\limits_{x\to1}y=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+2}{1+x}=\dfrac{3}{2}$. 故铅直渐近线为 $x=-1$.

16.【答案】 >1

【考情点拨】 本题考查了利用比较判别法求函的敛散性的知识点.

【应试指导】 因 $\dfrac{1}{1+n^p}<\dfrac{1}{n^p}$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛,由比较判别法知 $p>1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{1+n^p}$ 收敛.

17.【答案】 $\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{x+1}{2}+C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int\dfrac{1}{x^2+2x+5}dx=\int\dfrac{1}{(x+1)^2+4}d(x+1)=\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{x+1}{2}+C$.

18.【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了幂级数的收敛半径的知识点.

【应试指导】 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{(n+1)^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=1.$

19.【答案】 $xe^x(A\sin2x+B\cos2x)$

【考情点拨】 本题考查了二元常系数微分方程的特解形式的知识点.

【应试指导】 由特征方程为 $r^2-2r+5=0$,得特征根为 $1\pm2i$,而非齐次项为 $e^x\sin2x$,因此其特解应设为 $y^*=Axe^x\sin2x+Bxe^x\cos2x=xe^x(A\sin2x+B\cos2x)$.

20.【答案】 $\frac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了反常积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^2}dx=\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^a\frac{x}{(1+x^2)^2}dx=\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{1}{2}\int_0^a\frac{1}{(1+x^2)^2}d(1+x^2)=\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)\Big|_0^a=\frac{1}{2}\lim\limits_{a\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+a^2}\right)=\frac{1}{2}.$

三、解答题

21. $$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{B\sin x+\int_0^x\cos t^2dt}{x}$$
$$=B+\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\cos t^2dt}{x}$$
$$=B+\lim_{x\to0^+}\cos x^2=B+1,$$
$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{A(1-\cos2x)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0^-}\frac{2A\sin^2x}{x^2}=2A,$$
欲使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,应有 $2A=4=B+1$,所以 $A=2,B=3$.

22. 等式两边对 x 求导得,$e^{y^2}\cdot y'=\cos x^2\cdot2x+(-\sin y^2)\cdot2yy'$,

所以 $y'=\frac{2x\cos x^2}{e^{y^2}+2y\cdot\sin y^2}$,

故 $dy=\frac{2x\cos x^2}{e^{y^2}+2y\sin y^2}dx$.

23. $$\lim_{x\to0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left[e^x\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right]^{\frac{1}{x}}$$
$$=e\cdot\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{e^x}\right)^{\frac{e^x}{x}\cdot\frac{1}{e^x}}$$
$$=e\times e=e^2.$$

注:另解如下

由于 $\lim\limits_{x\to0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln(x+e^x)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+e^x)}{x}}$,

又因 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1+e^x}{x+e^x}=2$,

所以原式 $=e^2$.

24. 由 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{F_1+F_2\cdot\left(-\frac{z}{x^2}\right)}{F_1\cdot\frac{1}{y}+F_2\cdot\frac{1}{x}}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{F_1\cdot\left(-\frac{z}{y^2}\right)+F_2}{F_1\cdot\frac{1}{y}+F_2\cdot\frac{1}{x}}$,

所以

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xF_1-\frac{z}{x}F_2-\frac{z}{y}F_1+yF_2}{F_1\cdot\frac{1}{y}+F_2\cdot\frac{1}{x}}$$
$$=\frac{z\left(\frac{1}{x}F_2+\frac{1}{y}F_1\right)-xF_1-yF_2}{\frac{1}{y}F_1+\frac{1}{x}F_2}$$
$$=z-xy.$$

25. 分离变量得 $ydy=\frac{x}{1-x^2}dx$,

两边积分得 $\frac{1}{2}y^2=\int\frac{x}{1-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-x^2}d(1-x^2)$,

即 $\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+C_1$,

或 $y^2=-\ln|1-x^2|+C$.

26. 由题意知 $f(a)=f(b)=f(c)$,在 (a,c) 内有一点 η_1,使得 $f'(\eta_1)=0$,在 (c,b) 内有一点 η_2,使得 $f'(\eta_2)=0$,这里 $a<\eta_1<c<\eta_2<b$,再由罗尔定理,知在 (η_1,η_2) 内有一点 ξ,使得 $f''(\xi)=0$.

27. 由 $$\int_1^{+\infty}\frac{(b-a)x+a}{x^2+ax}dx=\int_1^{+\infty}\frac{(b-a)x}{x^2+ax}dx+\int_1^{+\infty}\frac{a}{x^2+ax}dx$$
$$=\int_1^{+\infty}\frac{b-a}{x+a}dx+\int_1^{+\infty}\frac{a}{x^2+ax}dx$$
$$=(b-a)\ln|x+a|\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{a}{x^2+ax}dx,$$
由此积分收敛知,应有 $b-a=0$,即 $b=a$,

所以上式 $=\int_1^{+\infty}\frac{a}{x^2+ax}dx$
$$=\lim_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{a}{x(x+a)}dx$$
$$=\lim_{A\to+\infty}\int_1^A\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+a}\right)dx$$
$$=\lim_{A\to+\infty}\ln\left|\frac{x}{x+a}\right|\Big|_1^A$$
$$=\lim_{A\to+\infty}\left(\ln\left|\frac{A}{A+a}\right|+\ln|1+a|\right)$$
$$=\ln|1+a|,$$
故 $\ln(1+a)=1$,所以 $1+a=e$,$a=e-1$,且 $b=e-1$.

28. 过 L_1 且平行于 L_2 的平面 π 的法线 $\boldsymbol{n}$ 应垂直于 L_1,L_2,

故 $\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&-1\\2&1&1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}=\{1,-3,1\}$,

由平面过 L_1,故其过点 $(1,2,3)$,

所以平面方程为 $(x-1)-3(y-2)+(z-3)=0$,

即 $x-3y+z+2=0$.

绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学(一)

全真模拟(六)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.满分150分.考试时间150分钟.

题　号	一	二	三	总　分	统分人签字
分　数					

密 封 线 内 不 要 答 题

第Ⅰ卷(选择题,共40分)

得　分	评卷人

一、选择题(1～10小题,每小题4分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的　　【　】

A. 充分条件　　B. 必要条件

C. 充要条件　　D. 以上都不对

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt[x]{1+2x}, & x\neq 0,\\ k, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 连续,则 k 等于　　【　】

A. e^2　　B. e^{-2}

C. 1　　D. 0

3. 若 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=5$,则　　【　】

A. $a=-9,b=14$　　B. $a=1,b=-6$

C. $a=-2,b=0$　　D. $a=-2,b=-5$

4. 曲线 $y=\dfrac{e^x}{1+x}$　　【　】

A. 有一个拐点　　B. 有两个拐点

C. 有三个拐点　　D. 无拐点

5. $\int x^2\mathrm{d}x=$　　【　】

A. $3x^2+C$　　B. $\dfrac{x^3}{3}+C$

C. x^3+C　　D. $\dfrac{x}{2}+C$

6. 已知 $\int_0^k(2x-3x^2)\mathrm{d}x=0$,则 $k=$　　【　】

A. 0或1　　B. 0或−1

C. 0或2　　D. 1或−1

7. 由曲线 $y=\dfrac{1}{x}$,直线 $y=x,x=2$ 所围面积为　　【　】

A. $\int_1^2\left(\dfrac{1}{x}-x\right)\mathrm{d}x$　　B. $\int_1^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

C. $\int_1^2\left(2-\dfrac{1}{y}\right)\mathrm{d}y+\int_1^2(2-y)\mathrm{d}y$　　D. $\int_1^2\left(2-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x+\int_1^2(2-x)\mathrm{d}x$

8. 设 $z=x^3-3x-y$,则它在点(1,0)处　　【　】

A. 取得极大值　　B. 取得极小值

C. 无极值　　D. 无法判定

9. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,则数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$　　【　】

A. 收敛　　B. 发散

C. 收敛且和为零　　D. 可能收敛也可能发散

10. 微分方程 $y''-2y'=x$ 的特解应设为　　【　】

A. Ax　　B. $Ax+B$

C. Ax^2+Bx　　D. Ax^2+Bx+C

第Ⅱ卷(非选择题,共110分)

得　分	评卷人

二、填空题(11～20小题,每小题4分,共40分)

11. 当 $x=1$ 时,$f(x)=x^3+3px+q$ 取到极值(其中 q 为任意常数),则 $p=$________.

12. 设 $f(x)=\int_0^x|t|\mathrm{d}t$,则 $f'(x)=$________.

13. 设 $f'(x^2)=\dfrac{1}{x}$,则 $f(x)=$________.

14. 设 $f(x)$ 是连续的奇函数,且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$,则 $\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x=$________.

15. 设 $z=x^y$,则 $\mathrm{d}z=$________.

16. 设 $I=\int_0^{16}\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{4}}^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x$ 交换积分次序,则有 $I=$________.

17. 当 p________时,反常积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{x^p}{1+x}\mathrm{d}x$ 收敛.

18. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 收敛还是发散,你的结论是________.

19. $y\ln x\mathrm{d}x+x\ln y\mathrm{d}y=0$ 的通解是________.

20. $y''-2y'-3y=0$ 的通解是________.

得　分	评卷人

三、解答题(21～28 题,共 70 分.解答应写出推理、演算步骤)

21.(本题满分 8 分)

设 $f(x)=\dfrac{(x-3)e^{\frac{1}{x-3}}}{\sin(x-3)}$,求 $f(x)$的间断点.

22.(本题满分 8 分)

设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{x}{3}\right)}{\frac{x}{2}}=a$,且 $f'(0)$存在,求 $f'(0)$.

23.(本题满分 8 分)

给定曲线 $y=x^3$ 与直线 $y=px-q$(其中 $p>0$),求 p 与 q 为何关系时,直线 $y=px-q$ 是$y=x^3$ 的切线.

24.(本题满分 8 分)

求$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}dx$.

25.(本题满分 8 分)

求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2^n}$的收敛半径和收敛区间.

26.(本题满分 10 分)

求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

27.(本题满分 10 分)

计算$\displaystyle\iint_D(xe^y+x^2y^2)dxdy$,其中 D 是由 $y=x^2$,$y=4x^2$,$y=1$ 围成.

28.(本题满分 10 分)

求$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1+x^2}dx$.

密　封　线　内　不　要　答　题

密封线内不要答题

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了判断函数极限的存在性的知识点.

【应试指导】 极限是否存在与函数在该点有无定义无关.

2.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了函数在一点处的连续性的知识点.

【应试指导】 由 $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1+2x}=\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot2}=e^2$，又因 $f(0)=k$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故 $k=e^2$.

3.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了洛必达法则的知识点.

【应试指导】 因 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=5$，则 $\lim\limits_{x\to2}(x^2+ax+b)=0$，因此 $4+2a+b=0$，即 $2a+b=-4$ 或 $b=-4-2a$，故 $5=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+ax-2a-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+2)+a(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x+2+a)=4+a$，所以 $a=1$，而 $b=-6$.

4.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了曲线的拐点的知识点.

【应试指导】 因 $y'=\dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$，$y''=\dfrac{e^x(1+x^2)}{(1+x)^3}$，则 y'' 在定义域内恒不等于 0，所以无拐点.

5.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int x^2dx=\dfrac{1}{3}x^3+C$.

6.【答案】 A

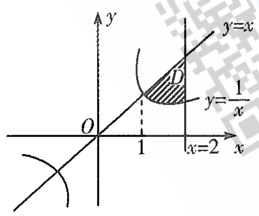
【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^k(2x-3x^2)dx=(x^2-x^3)\Big|_0^k=k^2-k^3=k^2(1-k)=0$，所以 $k=0$ 或 $k=1$.

7.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了曲线所围成的面积的知识点.

【应试指导】 曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 与直线 $y=x$，$x=2$ 所围成的区域 D 如下图所示，



则 $S_D=\int_1^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)dx$.

8.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数在一点处的极值的知识点.

【应试指导】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-1\neq0$，显然点 $(1,0)$ 不是驻点，故其处无极值.

9.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了数项级数收敛的必要条件的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的必要条件，但不是充分条件，从例子 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，即可知应选 D.

10.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了二阶常系数微分方程的特解的知识点.

【应试指导】 因 $f(x)=x$ 为一次函数，且特征方程为 $r^2-2r=0$，得特征根为 $r_1=0$，$r_2=2$. 于是特解应设为 $y^*=(Ax+B)x=Ax^2+Bx$.

二、填空题

11.【答案】 -1

【考情点拨】 本题考查了函数的极值的知识点.

【应试指导】 $f'(x)=3x^2+3p$，$f'(1)=3+3p=0$，所以 $p=-1$.

12.【答案】 $|x|$

【考情点拨】 本题考查了分段函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 当 $x>0$ 时，$f'(x)=\left(\int_0^x tdt\right)'=x$，当 $x<0$ 时，$f'(x)=\left[\int_0^x(-t)dt\right]'=-x$，当 $x=0$ 时，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x tdt}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}x=0$，同理 $f'_-(0)=0$，所以 $f'(0)=0$，故 $f'(x)=|x|$.

13.【答案】 $\begin{cases}2\sqrt{x}+C, & x>0,\\ -2\sqrt{x}+C, & x<0\end{cases}$

【考情点拨】 本题考查了由导函数求原函数的知识点.

【应试指导】 令 $x^2=t$，则 $f'(t)=\dfrac{1}{\pm\sqrt{t}}$，因此 $f(t)=\int f'(t)dt=\int\dfrac{1}{\pm\sqrt{t}}dt=2(\pm\sqrt{t})+C$，所以 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}+C, & x>0,\\ -2\sqrt{x}+C, & x<0.\end{cases}$

14.【答案】 -1

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】 $f(x)$ 是奇函数，则 $\int_{-1}^1 f(x)dx=0$，因此 $\int_{-1}^0 f(x)dx=-\int_0^1 f(x)dx=-1$.

15.【答案】 $yx^{y-1}dx+x^y\ln xdy$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】 $z=x^y$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$，所以 $dz=yx^{y-1}dx+x^y\ln xdy$.

16.【答案】 $\int_0^4dx\int_{x^2}^{4x}f(x,y)dy$

【考情点拨】 本题考查了交换积分次序的知识点.

【应试指导】 $I=\int_0^{16}dy\int_{\frac{y}{4}}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx$ 的积分区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqslant y\leqslant16,\dfrac{y}{4}\leqslant x\leqslant\sqrt{y}\right\}=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant4,x^2\leqslant y\leqslant4x\right\}$，所以 $I=\int_0^4dx\int_{x^2}^{4x}f(x,y)dy$.

17.【答案】 <0

【考情点拨】 本题考查了反常积分的敛散性(比较判别法)的知识点.

【应试指导】 若 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x^p}{1+x}dx$ 收敛，必有 $p<0$，因如果 $p\geqslant0$，则当 $x>1$ 时，$\dfrac{x^p}{1+x}>\dfrac{1}{1+x}$，而 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{1+x}dx$ 发散，故 $p<0$ 时，$\int_0^{+\infty}\dfrac{x^p}{1+x}dx$ 收敛.

18.【答案】 发散

【考情点拨】 本题考查了级数的敛散性(比较判别法)的知识点.

【应试指导】 由 $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}>\dfrac{1}{n+1}$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$ 发散，所以原级数发散.

19.【答案】 $(\ln x)^2+(\ln y)^2=C$

【考情点拨】 本题考查了分离变量微分方程的通解的知识点.

【应试指导】 分离变量得 $\dfrac{\ln x}{x}dx+\dfrac{\ln y}{y}dy=0$，积分得 $\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+\dfrac{1}{2}(\ln y)^2=C_1$，即 $(\ln x)^2+(\ln y)^2=C$.

20.【答案】 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$

【考情点拨】 本题考查了二阶常系数微分方程的通解的知识点.

【应试指导】 由 $y''-2y'-3y=0$ 的特征方程为 $r^2-2r-3=0$，得特征根为 $r_1=3$，$r_2=-1$，所以方程的通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$.

三、解答题

21. 由题意知，使 $f(x)$ 不成立的 x 值，均为 $f(x)$ 的间断点. 故 $\sin(x-3)=0$ 或 $x-3=0$ 时 $f(x)$ 无意义，则间断点为

$x-3=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

即 $x=3+k\pi(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$.

22. ∵ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{x}{3}\right)}{\frac{x}{2}}=a$,

∴ $a=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[f(x)-f(0)]-\left[f\left(\frac{x}{3}\right)-f(0)\right]}{\frac{x}{2}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{\frac{x}{2}}-\lim_{x\to0}\frac{f\left(\frac{x}{3}\right)-f(0)}{\frac{x}{2}}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{f\left(\frac{x}{3}\right)-f(0)}{\frac{x}{3}}$$

$$=2f'(0)-\frac{2}{3}f'(0)=\frac{4}{3}f'(0),$$

∴ $f'(0)=\frac{3}{4}a$.

注:导数的定义是 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$,只要符合这个结构特征,其极限若存在就是 $f'(x_0)$.

23. 由题意知,在切点处有 $x^3=px-q$,

两边对 x 求导得 $3x^2=p$,

所以 $x^3=3x^3-q$,即 $x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$,

因此 $p=3\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}\right)^2}$.

24. $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}dx=\int\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{-2}dx$

$$=-\frac{1}{2}\left(\int\sqrt{x-1}\,dx+\int\sqrt{x+1}\,dx\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]+C$$

$$=-\frac{1}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

25. 令 $x^2=t$,先考虑 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{t^n}{2^n}$,

∵ $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}}=\dfrac{1}{2}$,

∴ 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{t^n}{2^n}$ 的收敛半径 $R=2$,

∴ 当 $t<2$ 即 $x^2<2$,即 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ 时原级数收敛,

当 $x=\sqrt{2}$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n}\cdot(\sqrt{2})^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 发散,

当 $x=-\sqrt{2}$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n}\cdot(-\sqrt{2})^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 发散,

∴ 原级数的收敛区间为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

26. 记 $y=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$,则 $\ln y=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{\sin x}{x}$,

又 $\lim\limits_{x\to0}\ln y=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\cdot\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x+x(-\sin x)-\cos x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(-\frac{\sin x}{2}\right)=0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}y=1$,即 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=1$.

注:另解如下:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln\frac{\sin x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x}},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{2}\sin x\right)=0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=1$.

注:在解题中应尽量将题目化简,要大胆使用等价无穷小的代换.

27. 因 D 关于 y 轴对称,且 xe^y 是关于 x 的奇函数,x^2y^2 是关于 x 的偶函数,

则 $I=\iint\limits_D xe^y\,dxdy+\iint\limits_D x^2y^2\,dxdy$

$$=0+\iint\limits_D x^2y^2\,dxdy,$$

∴ $I=2\displaystyle\int_0^1dy\int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}}x^2y^2\,dx$

$$=2\int_0^1y^2\left(\frac{1}{3}x^3\Big|_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}}\right)dy$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1\left(y^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{8}y^{\frac{7}{2}}\right)dy$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1\frac{7}{8}y^{\frac{7}{2}}\,dy$$

$$=\frac{14}{24}\times\frac{2}{9}\left(y^{\frac{9}{2}}\Big|_0^1\right)$$

$$=\frac{7}{54}.$$

注:$\iint\limits_D xe^y\,d\sigma=0$ 是利用了对称性,由 D 关于 y 轴对称,xe^y 是 x 的奇函数,故积分为零.

28. ∵ $0<\dfrac{1}{1+x^2}<1$,

∴ $0<\dfrac{x^n}{1+x^2}<x^n$,

故 $0<\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1+x^2}dx<\int_0^{\frac{1}{2}}x^n\,dx=\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$,

∵ $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n+1}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right]=0$,

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1+x^2}dx=0$.