

2016 年成人高等学校招生全国统一考试专升本

高等数学(一)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 150 分钟.

题 号	一	二	三	总 分	统分人签字
分 数					

第 I 卷 (选择题,共 40 分)

得 分	评卷人

一、选择题(1~10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x}{2x} =$

A. $\frac{2}{3}$

B. 1

C. $\frac{3}{2}$

D. 3

2. 设函数 $y = 2x + \sin x$, 则 $y' =$

A. $1 - \cos x$

B. $1 + \cos x$

C. $2 - \cos x$

D. $2 + \cos x$

3. 设函数 $y = e^{x-2}$, 则 $dy =$

A. $e^{x-3} dx$

B. $e^{x-2} dx$

C. $e^{x-1} dx$

D. $e^x dx$

4. 设函数 $y = (2+x)^3$, 则 $y' =$

A. $(2+x)^2$

B. $3(2+x)^2$

C. $(2+x)^4$

D. $3(2+x)^4$

5. 设函数 $y = 3x + 1$, 则 $y'' =$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

6. $\frac{d}{dx} \int_0^x e^t dt =$

A. e^x

B. $e^x - 1$

C. e^{x-1}

D. e^{x+1}

7. $\int x dx =$

A. $2x^2 + C$

B. $x^2 + C$

C. $\frac{1}{2}x^2 + C$

D. $x + C$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x dx =$

A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. 2

D. 3

9. 设函数 $z = 3x^2y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$

A. $6y$

B. $6xy$

C. $3x$

D. $3x^2$

10. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ 的收敛半径为

A. 0

B. 1

C. 2

D. $+\infty$

第 II 卷 (非选择题,共 110 分)

得 分	评卷人

二、填空题(11~20 小题,每小题 4 分,共 40 分)

11. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2}{x}} =$

12. 设函数 $y = x^3$, 则 $y' =$

13. 设函数 $y = (x-3)^4$, 则 $dy =$

14. 设函数 $y = \sin(x-2)$, 则 $y'' =$

15. $\int \frac{1}{2x} dx =$

16. $\int_{-1}^1 x^7 dx =$

17. 过坐标原点且与直线 $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}$ 垂直的平面方程为

18. 设函数 $z = 3x + y^2$, 则 $dz =$

19. 微分方程 $y' = 3x^2$ 的通解为 $y =$

20. 设区域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 则 $\iint_D 2 dx dy =$

得 分	评卷人

三、解答题(21~28 题,共 70 分.解答应写出推理、演算步骤)

21.(本题满分 8 分)

设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续,求 a .

22.(本题满分 8 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{\sin x}$.

23.(本题满分 8 分)

求曲线 $y = x^3 - 3x + 5$ 的拐点.

24.(本题满分 8 分)

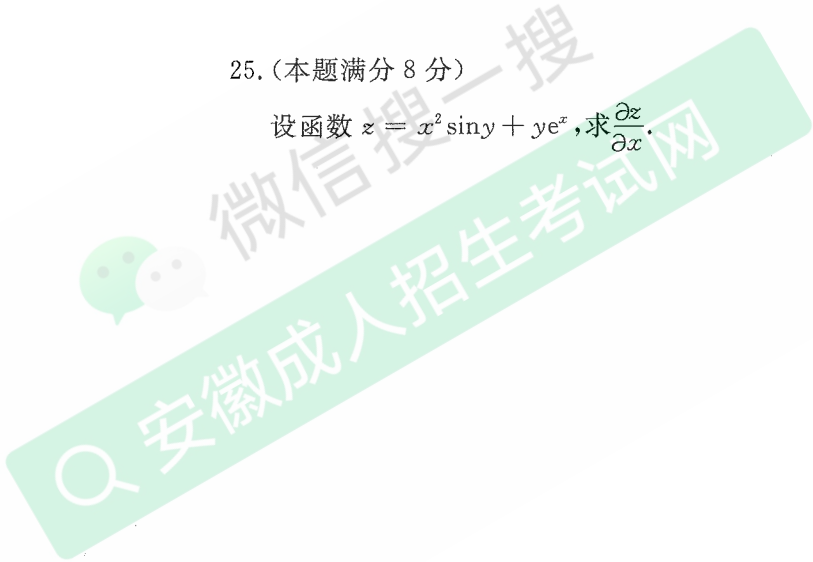
求 $\int (x - e^x) dx$.

25.(本题满分 8 分)

设函数 $z = x^2 \sin y + ye^x$,求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

26.(本题满分 10 分)

设 D 为曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = x$ 所围成的有界平面图形,求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V .



27. (本题满分 10 分)

求 $\iint_D (x^3 + y) dx dy$, 其中 D 是由曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 1$ 所围成的有界平面区域.

28. (本题满分 10 分)

求微分方程 $y'' - y' - 2y = e^x$ 的通解.



参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 的应用的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{3}{2}$.

2. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了一阶导数的知识点.

【应试指导】 因为 $y = 2x + \sin x$, 则 $y' = 2 + \cos x$.

3. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了一元函数的微分的知识点.

【应试指导】 因为 $y = e^{x-2}$, $y' = e^{x-2}$, 所以 $dy = e^{x-2} dx$.

4. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了复合函数求导的知识点.

【应试指导】 因为 $y = (2+x)^3$, 所以 $y' = 3(2+x)^2 \cdot (2+x)' = 3(2+x)^2$.

5. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了一元函数的高阶导数的知识点.

【应试指导】 因为 $y = 3x + 1$, 故 $y' = 3, y'' = 0$.

6. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了定积分与原函数的关系的知识点.

【应试指导】 因为 $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$, 故 $\frac{d}{dx} \int_0^x e^t dt = e^x$.

7. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了不定积分的原函数的知识点.

【应试指导】 $\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C$.

8. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x dx = -2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$
 $= -2 \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right)$
 $= 2$.

9. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了二元函数的偏导数的知识点.

【应试指导】 因为 $z = 3x^2 y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2$.

10. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了幂级数的收敛半径的知识点.

【应试指导】 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1,$$

故幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ 的收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = 1$.

二、填空题

11. 【答案】 e^2

【考点点拨】 本题考查了特殊极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [(1+x)^{\frac{1}{x}}]^2 = e^2$.

12. 【答案】 $3x^2$

【考点点拨】 本题考查了函数的导数的知识点.

【应试指导】 因为 $y = x^3$, 所以 $y' = 3x^2$.

13. 【答案】 $4(x-3)^3 dx$

【考点点拨】 本题考查了复合函数的微分的知识点.

【应试指导】 因为 $y = (x-3)^4$, $y' = 4(x-3)^3$, 则 $dy = 4(x-3)^3 dx$.

14. 【答案】 $-\sin(x-2)$

【考点点拨】 本题考查了一元函数的高阶导数的知识点.

【应试指导】 因为 $y = \sin(x-2)$, $y' = \cos(x-2)$, $y'' = -\sin(x-2)$.

15. 【答案】 $\frac{1}{2} \ln |x| + C$

【考点点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \ln |x| + C$.

16. 【答案】 0

【考点点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_{-1}^1 x^7 dx = \frac{1}{8} x^8 \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0$.

17. 【答案】 $3x + 2y - 2z = 0$

【考点点拨】 本题考查了平面方程的知识点.

【应试指导】 由直线方程可知, 直线 $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}$ 的方向向量为 $(3, 2, -2)$, 则所求平面的法向量为 $(3, 2, -2)$, 则该平面方程为 $3x + 2y - 2z = 0$.

18. 【答案】 $3dx + 2ydy$

【考点点拨】 本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】 因为 $z = 3x + y^2$, 所以 $\frac{\partial z}{\partial x} = 3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$, 则 $dz = 3dx + 2ydy$.

19. 【答案】 $x^3 + C$

【考点点拨】 本题考查了一阶微分方程的通解的知识点.

【应试指导】 $y' = 3x^2$, 即 $dy = 3x^2 dx$, 两边积分得 $y = x^3 + C$.

20. 【答案】 2

【考点点拨】 本题考查了二重积分的知识点.

【应试指导】 $\iint_D 2 dx dy = 2 \iint_D dx dy$

$$= 2 \cdot S_D$$

$$= 2.$$

三、解答题

21. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

由于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 因此 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

可得 $a = 1$.

22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{\cos x}$

$$= -1.$$

23. $y' = 3x^2 - 3, y'' = 6x.$

令 $y'' = 0$, 解得 $x = 0$.

当 $x < 0$ 时, $y'' < 0$; 当 $x > 0$ 时, $y'' > 0$,

当 $x = 0$ 时, $y = 5$.

因此, 点 $(0, 5)$ 为所给曲线的拐点.

24. $\int (x - e^x) dx = \frac{x^2}{2} - e^x + C.$

25. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin y + y e^x.$

26. 由 $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases}$ 可解得两曲线的交点为 $(0, 0), (1, 1)$.

旋转体的体积 $V = \int_0^1 \pi [x^2 - (x^2)^2] dx$

$$= \pi \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{15} \pi.$$

27. 由于积分区域 D 关于 y 轴对称, 因此

$$\iint_D x^3 dx dy = 0.$$

记 D_1 为区域 D 在第一象限的部分, 则

$$\iint_D y dx dy = 2 \iint_{D_1} y dx dy$$

$$= 2 \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 y dy$$

$$= \int_0^1 (1 - x^4) dx$$

$$= \frac{4}{5}.$$

所以 $\iint_D (x^3 + y) dx dy = \frac{4}{5}.$

28. 对应齐次微分方程的特征方程为

$$r^2 - r - 2 = 0.$$

特征根为 $r_1 = -1, r_2 = 2$.

齐次方程的通解为 $Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$.

设原方程的特解为 $y^* = A e^x$, 代入原方程可得 $A = -\frac{1}{2}$, 因此 $y^* = -\frac{1}{2} e^x$.

故原方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{2} e^x (C_1, C_2 \text{ 为任意常数}).$$