

2015年成人高等学校招生全国统一考试专升本

高等数学(一)

本试卷分第I卷(选择题)和第II卷(非选择题)两部分,满分150分,考试时间150分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第I卷(选择题,共40分)

得分	评卷人

一、选择题(1~10小题,每小题4分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- 设 $b \neq 0$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin bx$ 是 x^2 的
 - A. 高阶无穷小量
 - B. 等价无穷小量
 - C. 同阶但不等价无穷小量
 - D. 低阶无穷小量
- 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(1+x) - f(1)} = 2$, 则 $f'(1) =$
 - A. 2
 - B. 1
 - C. $\frac{1}{2}$
 - D. 0
- 函数 $f(x) = x^3 - 12x + 1$ 的单调减区间为
 - A. $(-\infty, +\infty)$
 - B. $(-\infty, -2)$
 - C. $(-2, 2)$
 - D. $(2, +\infty)$
- 设 $f'(x_0) = 0$, 则 $x = x_0$
 - A. 为 $f(x)$ 的驻点
 - B. 不为 $f(x)$ 的驻点
 - C. 为 $f(x)$ 的极大值点
 - D. 为 $f(x)$ 的极小值点
- 下列函数中为 $f(x) = e^{2x}$ 的原函数的是
 - A. e^x
 - B. $\frac{1}{2}e^{2x}$
 - C. e^{2x}
 - D. $2e^{2x}$

- $\int x \cos x^2 dx =$
 - A. $-2\sin x^2 + C$
 - B. $-\frac{1}{2}\sin x^2 + C$
 - C. $2\sin x^2 + C$
 - D. $\frac{1}{2}\sin x^2 + C$
- $\frac{d}{dx} \int_x^0 t e^{t^2} dt =$
 - A. $x e^{x^2}$
 - B. $-x e^{x^2}$
 - C. $x e^{-x^2}$
 - D. $-x e^{-x^2}$
- 设 $z = x^y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$
 - A. $y x^{y-1}$
 - B. $x^y \ln x$
 - C. x^{y-1}
 - D. $x^{y-1} \ln x$
- 设 $z = x^2 + y^3$, 则 $dz|_{(1,1)} =$
 - A. $3dx + 2dy$
 - B. $2dx + 3dy$
 - C. $2dx + dy$
 - D. $dx + 3dy$
- 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k}{n^2}$ (k 为非零常数)
 - A. 绝对收敛
 - B. 条件收敛
 - C. 发散
 - D. 收敛性与 k 的取值有关

第II卷(非选择题,共110分)

得分	评卷人

二、填空题(11~20小题,每小题4分,共40分)

- 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} =$ _____.
- 函数 $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ 的间断点为 $x =$ _____.
- 设 $y = x^2 + e^x$, 则 $dy =$ _____.
- 设 $y = (2+x)^{100}$, 则 $y' =$ _____.
- $\int \frac{dx}{3-x} =$ _____.
- $\int_{-1}^1 \frac{x}{1+x^2} dx =$ _____.

密封线内不要答题

姓名

17. $\int_0^1 e^{3x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

18. 设 $z = y^2 \sin x$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

19. 微分方程 $y' = 2x$ 的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

20. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 的收敛半径 $R = \underline{\hspace{2cm}}$.

得分	评卷人

三、解答题(21~28题,共70分.解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分8分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$.

22. (本题满分8分)

设曲线方程为 $y = e^x + x$, 求 $y' \Big|_{x=0}$ 以及该曲线在点(0,1)处的法线方程.

23. (本题满分8分)

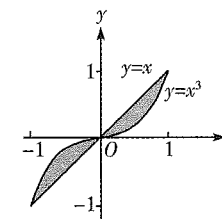
计算 $\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

24. (本题满分8分)

计算 $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$.

25. (本题满分8分)

求曲线 $y = x^3$ 与直线 $y = x$ 所围图形(如图中阴影部分所示)的面积 S .



26. (本题满分10分)

设二元函数 $z = x^2 + xy + y^2 + x - y - 5$, 求 z 的极值.

27. (本题满分 10 分)

求微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = x$ 的通解.

28. (本题满分 10 分)

计算 $\iint_D x^2 y dx dy$, 其中 D 是由直线 $y = x, x = 1$ 及 x 轴围成的有界区域.



参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了无穷小量的比较的知识点.

【应试指导】 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin bx}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin bx}{bx} \cdot b \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = b \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$, 故 $\sin bx$ 是比 x^2 低阶的无穷小量, 即 $\sin bx$ 是 x^2 的低阶无穷小量.

2. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了导数的定义的知识点.

【应试指导】 $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(1+x) - f(1)}} = \frac{1}{2}$.

3. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数的单调性的知识点.

【应试指导】 $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -2$ 或 $x = 2$. 当 $-2 < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$, 即函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(-2, 2)$.

4. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了驻点的知识点.

【应试指导】 使得函数的一阶导数的值为零的点, 称为函数的驻点, 即 $f'(x) = 0$ 的根称为驻点. 驻点不一定是极值点.

5. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了原函数的知识点.

【应试指导】 $\int f(x) dx = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$ (C 为任意常数), 只有 B 项是 $f(x) = e^{2x}$ 的一个原函数.

6. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int x \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int \cos x^2 dx^2 = \frac{1}{2} \sin x^2 + C$ (C 为任意常数).

7. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了变上限积分的性质的知识点.

【应试指导】 $\frac{d}{dx} \int_x^0 t e^{t^2} dt = - \frac{d}{dx} \int_0^x t e^{t^2} dt = - x e^{x^2}$.

8. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $z = x^y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = y x^{y-1}$.

9. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了全微分的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2$, 则 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 2x dx + 3y^2 dy$, 故 $dz \Big|_{(1,1)} = 2dx + 3dy$.

10. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了级数的收敛性的知识点.

【应试指导】 $n \rightarrow \infty$ 时, $u_n = (-1)^n \frac{k}{n^2} \rightarrow 0$. $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{k}{n^2} \right| = |k| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, 显然级数 $|k| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收

敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k}{n^2}$ 绝对收敛.

二、填空题

11.【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了洛必达法则的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1.$

12.【答案】 2

【考情点拨】 本题考查了函数的间断点的知识点.

【应试指导】 函数 $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ 在 $x=2$ 处无定义,故 $x=2$ 为 $f(x)$ 的间断点.

13.【答案】 $(2x+e^x)dx$

【考情点拨】 本题考查了微分的知识点.

【应试指导】 $y' = 2x + e^x$,故 $dy = (2x + e^x)dx$.

14.【答案】 $100(2+x)^{99}$

【考情点拨】 本题考查了基本初等函数的导数公式的知识点.

【应试指导】 $y = (2+x)^{100}$,则 $y' = 100(2+x)^{100-1} = 100(2+x)^{99}$.

15.【答案】 $-\ln|3-x|+C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \frac{dx}{3-x} = -\int \frac{1}{x-3}d(x-3) = -\ln|x-3|+C(C$ 为任意常数).

16.【答案】 0

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】 因为 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 在 $[-1,1]$ 上为连续奇函数,故 $\int_{-1}^1 \frac{x}{1+x^2}dx = 0.$

17.【答案】 $\frac{1}{3}(e^3-1)$

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^1 e^{3x}dx = \frac{1}{3} \int_0^1 e^{3x}d(3x) = \frac{1}{3}e^{3x} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(e^3-1).$

18.【答案】 $y^2 \cos x$

【考情点拨】 本题考查了一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 因为 $z = y^2 \sin x$,则 $\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \cos x.$

19.【答案】 $x^2 + C$

【考情点拨】 本题考查了微分方程的通解的知识点.

【应试指导】 所给方程为可分离变量的微分方程,分离变量得 $dy = 2xdx$,两边同时积分可得 $y = x^2 + C$,即该微分方程的通解为 $y = x^2 + C.$

20.【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了级数的收敛半径的知识点.

【应试指导】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$,故收敛半径 $R = 1.$

三、解答题

21. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x-1)}{2x} = \frac{1}{2}.$

22. $y' = e^x + 1,$

$y' \Big|_{x=0} = 2.$

曲线在点 $(0,1)$ 处的法线方程为

$y-1 = -\frac{1}{2}(x-0),$

即 $x+2y-2=0.$

23. 设 $\sqrt{x} = t$,则 $x = t^2, dx = 2tdt.$

$\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{e^{-t}}{t} \cdot 2tdt = 2 \int e^{-t}dt = -2e^{-t} + C = -2e^{-\sqrt{x}} + C.$

24. $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx = \int_1^e \frac{1}{x}dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \ln x \Big|_1^e + \frac{1}{2}(\ln x)^2 \Big|_1^e = \frac{3}{2}.$

25. 由对称性知

$S = 2 \int_0^1 (x-x^3)dx = 2 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$

26. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x+y+1, \frac{\partial z}{\partial y} = x+2y-1.$

由 $\begin{cases} 2x+y+1=0, \\ x+2y-1=0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=-1, \\ y=1. \end{cases}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$

$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(-1,1)} = 2, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(-1,1)} = 1, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(-1,1)} = 2.$

$B^2 - AC = -3 < 0, A > 0,$

因此点 $(-1,1)$ 为 z 的极小值点,极小值为 $-6.$

27. $y = e^{-\int \frac{1}{x}dx} \left(\int x e^{\frac{1}{x}dx} dx + C \right) = \frac{1}{x} \left(\int x^2 dx + C \right) = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{3}x^3 + C \right).$

28. $\iint_D x^2 y dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x x^2 y dy = \frac{1}{2} \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{10} x^5 \Big|_0^1 = \frac{1}{10}.$