

## 2014 年成人高等学校招生全国统一考试专升本

## 高等数学(一)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 满分 150 分. 考试时间 150 分钟.

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

## 第 I 卷(选择题, 共 40 分)

得分	评卷人

一、选择题(1~10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{2x} =$

- A.  $e^{-2}$   
B.  $e^{-1}$   
C.  $e$   
D.  $e^2$

2. 设  $y = e^{-5x}$ , 则  $dy =$

- A.  $-5e^{-5x} dx$   
B.  $-e^{-5x} dx$   
C.  $e^{-5x} dx$   
D.  $5e^{-5x} dx$

3. 设函数  $f(x) = x \sin x$ , 则  $f'(\frac{\pi}{2}) =$

- A.  $\frac{1}{2}$   
B. 1  
C.  $\frac{\pi}{2}$   
D.  $2\pi$

4. 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  连续, 在  $(a, b)$  可导,  $f'(x) > 0$ . 若  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , 则  $y = f(x)$  在  $(a, b)$

- A. 不存在零点  
B. 存在唯一零点  
C. 存在极大值点  
D. 存在极小值点

5.  $\int x^2 e^{x^3} dx =$

- A.  $\frac{1}{3}x^2 e^{x^3} + C$   
B.  $3x^2 e^{x^3} + C$   
C.  $\frac{1}{3}e^{x^3} + C$   
D.  $3e^{x^3} + C$

6.  $\int_{-1}^1 (3x^2 + \sin^5 x) dx =$

- A. -2  
B. -1  
C. 1  
D. 2

7.  $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx =$

- A.  $-e$   
B.  $-e^{-1}$   
C.  $e^{-1}$   
D.  $e$

8. 设二元函数  $z = x^2 y + x \sin y$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial x} =$

- A.  $2xy + \sin y$   
B.  $x^2 + x \cos y$   
C.  $2xy + x \sin y$   
D.  $x^2 y + \sin y$

9. 设二元函数  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 则  $(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 =$

- A. 1  
B. 2  
C.  $x^2 + y^2$   
D.  $\frac{1}{x^2 + y^2}$

10. 设球面方程为  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 4$ , 则该球的球心坐标与半径分别为

- A.  $(-1, 2, -3); 2$   
B.  $(-1, 2, -3); 4$   
C.  $(1, -2, 3); 2$   
D.  $(1, -2, 3); 4$

## 第 II 卷(非选择题, 共 110 分)

得分	评卷人

二、填空题(11~20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

11. 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{ax} = 3$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

12. 曲线  $y = \frac{x+1}{2x+1}$  的铅直渐近线方程为 \_\_\_\_\_.

13. 设  $y = \frac{x}{1+x}$ , 则  $y' =$  \_\_\_\_\_.

14. 设函数  $f(x) = \begin{cases} 2x+a, & x \neq 0, \\ 3, & x=0 \end{cases}$  在  $x=0$  处连续, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

15. 曲线  $y = x + \cos x$  在点  $(0, 1)$  处的切线的斜率  $k =$  \_\_\_\_\_.

16.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx =$  \_\_\_\_\_.

17. 设函数  $f(x) = \int_0^x e^t dt$ , 则  $f'(0) =$  \_\_\_\_\_.

18. 设二元函数  $z = x^2 + 2xy$ , 则  $dz =$  \_\_\_\_\_.

19. 过原点(0,0,0)且垂直于向量(1,1,1)的平面方程为\_\_\_\_\_.

20. 微分方程  $y' - 2xy = 0$  的通解为  $y = \underline{\hspace{2cm}}$ .

得 分	评卷人

三、解答题(21~28题,共70分.解答应写出推理、演算步骤)

21.(本题满分8分)

计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x + e^{-x} - 1}{x^2}$ .

22.(本题满分8分)

设  $y = y(x)$  满足  $2y + \sin(x+y) = 0$ , 求  $y'$ .



23.(本题满分8分)

求函数  $f(x) = x^3 - 3x$  的极大值.

24.(本题满分8分)

计算  $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$ .

25.(本题满分8分)

设函数  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \cos(x-1)$ , 求  $f'(1)$ .

26.(本题满分10分)

计算  $\iint_D (x+1) dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $x=0, y=0$  及  $x+y=1$  围成的平面有界区域.

密 封 线 内 不 要 答 题

27.(本题满分 10 分)

判定级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{5^n}$  的收敛性.

## 参考答案及解析

### 一、选择题

1.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了特殊极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$  的知识点.

【应试指导】  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} = e^2$ .

2.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了一元函数的微分的知识点.

【应试指导】 因为  $y = e^{-5x}$ , 所以  $dy = -5e^{-5x} dx$ .

3.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了导数的基本公式的知识点.

【应试指导】 因为  $f'(x) = \sin x + x \cos x$ , 所以  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 1$ .

4.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了零点定理的知识点.

【应试指导】 由题意知,  $f(x)$  在  $(a, b)$  上单调递增, 且  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , 则  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  内存在唯一零点.

5.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了第一类换元积分法的知识点.

【应试指导】  $\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3} dx^3 = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$ .

6.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了定积分的奇偶性的知识点.

【应试指导】  $\int_{-1}^1 (3x^2 + \sin^5 x) dx = 3 \int_{-1}^1 x^2 dx + \int_{-1}^1 \sin^5 x dx$ . 因为  $f_1(x) = x^2$  为偶函数, 所以  $\int_{-1}^1 x^2 dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$ .

因为  $f_2(x) = \sin^5 x$  为奇函数, 所以  $\int_{-1}^1 \sin^5 x dx = 0$ . 故  $\int_{-1}^1 (3x^2 + \sin^5 x) dx = \frac{2}{3} \times 3 = 2$ .

7.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了无穷区间的反常积分的知识点.

【应试指导】  $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a e^{-x} dx$   
 $= \lim_{a \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) \Big|_1^a$   
 $= \lim_{a \rightarrow +\infty} (e^{-1} - e^{-a}) = e^{-1}$ .

8.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了二元函数的偏导数的知识点.

【应试指导】 因为  $z = x^2 y + x \sin y$ , 所以  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + \sin y$ .

9.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了二元函数的偏导数的应用的知识点.

【应试指导】 因为  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 所以  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , 故  $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1$ .

28.(本题满分 10 分)

求微分方程  $y'' + 3y' + 2y = e^x$  的通解.



密 封 线 内 不 要 答 题

10.【答案】C

【考情点拨】本题考查了球的球心坐标与半径的知识点。

【应试指导】 $(x-1)^2 + [y-(-2)]^2 + (z-3)^2 = 2^2$ , 所以, 该球的球心坐标与半径分别为(1, -2, 3), 2.

二、填空题

11.【答案】 $\frac{2}{3}$ 【考情点拨】本题考查了特殊极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 的知识点。【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{ax} = \frac{2}{a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{2}{a} = 3$ , 则  $a = \frac{2}{3}$ .12.【答案】 $x = -\frac{1}{2}$ 

【考情点拨】本题考查了曲线的铅直渐近线的知识点。

【应试指导】当  $x \rightarrow -\frac{1}{2}$  时,  $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{x+1}{2x+1} = \infty$ , 则  $x = -\frac{1}{2}$  是  $y = \frac{x+1}{2x+1}$  的铅直渐近线。13.【答案】 $\frac{1}{(1+x)^2}$ 

【考情点拨】本题考查了一元函数的一阶导数的知识点。

【应试指导】因为  $y = \frac{x}{1+x}$ , 所以  $y' = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$ .

14.【答案】3

【考情点拨】本题考查了函数在一点处连续的知识点。

【应试指导】因为函数  $f(x)$  在  $x=0$  处连续, 则  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x+a) = a = f(0) = 3$ .

15.【答案】1

【考情点拨】本题考查了导数的几何意义的知识点。

【应试指导】因为  $y = x + \cos x$ , 所以  $y' = 1 - \sin x$ ,  $y'(0) = 1$ , 即所求的斜率  $k = 1$ .16.【答案】 $\frac{1}{2}$ 

【考情点拨】本题考查了第一类换元积分法的知识点。

【应试指导】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x d(\sin x) = \frac{1}{2} \sin^2 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$ .

17.【答案】1

【考情点拨】本题考查了变上限的定积分的知识点。

【应试指导】因为  $f(x) = \int_0^x e^t dt$ , 所以  $f'(x) = e^x$ ,  $f'(0) = 1$ .18.【答案】 $2(x+y)dx + 2xdy$ 

【考情点拨】本题考查了二元函数的全微分的知识点。

【应试指导】因为  $z = x^2 + 2xy$ , 所以  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x$ , 则  $dz = 2(x+y)dx + 2xdy$ .19.【答案】 $x+y+z=0$ 

【考情点拨】本题考查了平面方程的知识点。

【应试指导】由题意知, 平面的法向量为(1, 1, 1), 则平面方程可设为  $x+y+z+D=0$ , 因该平面过(0, 0, 0)点, 所以  $D=0$ , 即  $x+y+z=0$ .20.【答案】 $Ce^{x^2}$ 

【考情点拨】本题考查了一阶微分方程的通解的知识点。

【应试指导】 $y'-2xy=0$ , 即  $\frac{dy}{y}=2xdx$ , 两边积分得  $\ln y = x^2 + C_1$ , 即  $y = Ce^{x^2}$ .

三、解答题

$$\begin{aligned} 21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x + e^{-x} - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + xe^x - e^{-x}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^x + xe^x + e^{-x}}{2} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

22. 将  $2y + \sin(x+y) = 0$  两边对  $x$  求导, 得  
 $2y' + \cos(x+y) \cdot (1+y') = 0$ .

$$\text{解得 } y' = -\frac{\cos(x+y)}{2+\cos(x+y)}.$$

23. 因为  $f'(x) = 3x^2 - 3$ ,  
令  $f'(x) = 0$ , 得驻点  $x_1 = -1, x_2 = 1$ .又  $f''(x) = 6x$ ,  
 $f''(-1) = -6 < 0, f''(1) = 6 > 0$ .  
所以  $x_1 = -1$  为  $f(x)$  的极大值点,  
 $f(x)$  的极大值为  $f(-1) = 2$ .

$$\begin{aligned} 24. \int \frac{e^x}{1+e^x} dx &= \int \frac{1}{1+e^x} d(e^x + 1) \\ &= \ln(1+e^x) + C. \end{aligned}$$

25. 因为  $f'(x) = x - \sin(x-1)$ ,  
所以  $f'(1) = 1$ .

$$\begin{aligned} 26. \iint_D (x+1) dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+1) dy \\ &= \int_0^1 (1+x)(1-x) dx \\ &= \left( x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

27. 因为  $u_n = \frac{5n+1}{5^n} > 0$ ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{5(n+1)+1}{5^{n+1}}}{\frac{5n+1}{5^n}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5n+6}{5n+1},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \cdot \frac{5n+6}{5n+1} = \frac{1}{5} < 1,$$

所以原级数收敛。

28.  $y'' + 3y' + 2y = e^x$  对应的齐次方程为  
 $y'' + 3y' + 2y = 0$ .特征方程为  $r^2 + 3r + 2 = 0$ ,  
特征根为  $r_1 = -2, r_2 = -1$ .

所以齐次方程的通解为

$$Y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}.$$

设  $y^* = Ae^x$  为原方程的一个特解,  
代入原方程可得

$$A = \frac{1}{6}.$$

所以原方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{6} e^x.$$